

UNIVERSITE MOULAY ISMAIL

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES D'ERRACHIDIA

Département de physique

COURS DE

MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Licence En Sciences et Techniques

MIP S1 - Module P112

Année Universitaire 2020-2021

Pr. Abdelmajid DAYA

SOMMAIRE

CHAPITRE I : ANALYSE VECTORIELLE

CHAPITRE II : CINÉMATIQUE

CHAPITRE III : *CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS*

CHAPITRE IV : *DYNAMIQUE*

CHAPITRE V : *THÉOREMES GÉNÉRAUX*

CHAPITRE I

ANALYSE VECTORIELLE

1 Vecteurs

1.1 Définitions

Un vecteur, noté \vec{V} est caractérisé par :

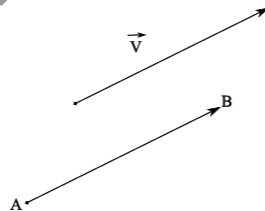
- une direction
- un sens
- une norme notée $\|\vec{V}\|$ ou V toujours positive.

Dans l'espace de dimension ≤ 3 , il est représenté graphiquement par **un segment de droite orienté dont la longueur est proportionnelle à sa norme**. Deux segments de droites orientés parallèles, de même longueur et de même sens représentent le même vecteur. En mécanique il n'est pas nécessaire de donner à un vecteur un "point d'accroche", mais ceci peut favoriser la compréhension de certains problèmes (exemple le point d'application d'une force). On parlera dans ce cas d'un vecteur lié

Vecteur lié

On peut lier un vecteur à 2 points A et B de l'espace. Le vecteur lié \overrightarrow{AB} est tel que:

- $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- sa direction est portée par la droite (AB) ;
- \overrightarrow{AB} est orienté de A vers B. On le représente par une flèche allant de A vers B.



Représentation d'un vecteur et d'un vecteur lié. Ici, $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ car ces deux vecteurs ont Les mêmes directions, sens et norme.

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires lorsque l'un est le produit de l'autre par un nombre réel :

$$\vec{U} = \alpha \vec{V}$$

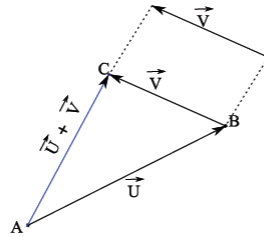
Les vecteurs \vec{U} et \vec{V} ont des directions parallèles ($\vec{U} \parallel \vec{V}$)

Vecteur unitaire

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme égale à 1. Par exemple, le vecteur unitaire colinéaire à \vec{V} et de même sens s'écrit : $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$.

Somme vectorielle

Le vecteur $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$ s'obtient en mettant bout à bout les deux vecteurs (par translation) et en joignant les extrémités.



$$\begin{aligned}\vec{U} &= \overrightarrow{AB}; & \vec{V} &= \overrightarrow{BC} \\ \vec{W} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

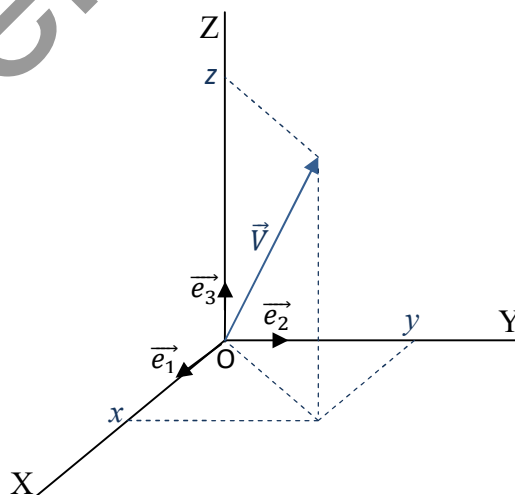
1.2 Représentation d'un vecteur

L'écriture mathématique des vecteurs dépend de la base (repère) choisie. Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé $\{OX, OY, OZ\}$, un vecteur quelconque \vec{V} se note :

$$\vec{V} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \text{ où encore } \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

ici (x, y, z) sont les coordonnées du vecteur

tandis que $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base orthonormée du repère choisi : la base est dit orthonormée si les vecteurs de bases sont orthogonaux entre eux et unitaires.



Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée

Addition de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ et $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ s'écrit dans la même base \mathfrak{B} :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$$

En conséquence si l'on connaît les coordonnées de deux points A et B dans une base on peut facilement calculer les coordonnées du vecteur \vec{AB} :

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}} ; \vec{OB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$$

Produit d'un vecteur par un scalaire

La multiplication d'un vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ par un scalaire α s'écrit dans la même base \mathfrak{B} :

$$\alpha \vec{V} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$$

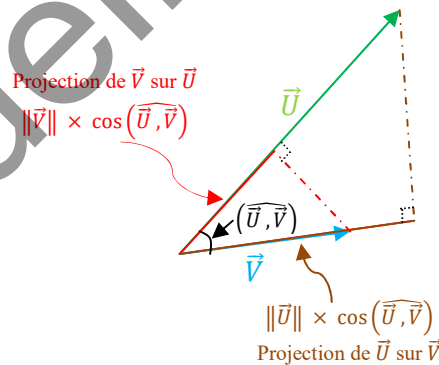
2 Produit scalaire

2.1 Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} est le scalaire :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \cos(\widehat{(\vec{U}, \vec{V})})$$

Graphiquement, le produit scalaire correspond au produit de la norme du vecteur \vec{U} avec la projection du vecteur \vec{V} sur le vecteur \vec{U} , ou inversement.



2.2 Conséquences

Tout d'abord, la norme d'un vecteur peut s'exprimer comme un produit scalaire :

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = \|\vec{V}\|^2$$

Ensuite, si deux vecteurs forment un angle droit, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{U} \perp \vec{V} \Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

Ainsi, les vecteurs de la base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont tels que :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

De ce fait, si l'on connaît les coordonnées de deux vecteurs dans une base orthonormée, le produit scalaire s'exprimera uniquement en fonction des coordonnées.

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ alors } \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

et la norme du vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ s'écrit :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Enfin, la composante x s'écrit comme un produit scalaire :

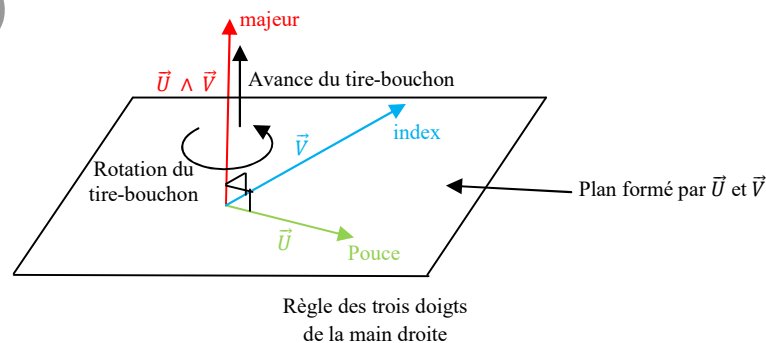
$$x = \vec{V} \cdot \vec{e}_1$$

3 Produit vectoriel

3.1 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} est un vecteur \vec{W} , noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ dont :

- La direction est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} .
- Le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite (ou par la loi du tire-bouchon).
- La norme vaut $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times |\sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}})|$



3.2 Conséquences

- $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$
- $\vec{U} \parallel \vec{V} \Leftrightarrow \vec{U} \wedge \vec{V} = 0$
- $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}) + (\vec{U} \wedge \vec{W})$
- $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{W})\vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V})\vec{W}$
- La base orthonormée $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est **directe** si : $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$ (deux autres relations sont obtenues par permutation circulaire)

3.3 Expression du produit vectoriel dans une base orthonormée directe

Soient deux vecteurs $\vec{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ et $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ exprimés dans la base orthonormée directe $\mathfrak{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on montre alors :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$$

Nous pouvons remarquer que la première composante de \vec{W} est le déterminant $\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$ les autres composantes s'obtenant par permutation circulaire des indices.

4 Dérivée d'un vecteur

La dérivée d'un vecteur $\vec{U}(\beta)$ par rapport à une variable β est un vecteur, et est construit de la même manière que pour une fonction scalaire.

$$\frac{d\vec{U}(\beta)}{d\beta} = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\vec{U}(\beta + \Delta\beta) - \vec{U}(\beta)}{\Delta\beta}$$

4.1 Propriétés

Nous admettons les propriétés suivantes, qui sont les transpositions aux fonctions vectorielles des propriétés classiques des dérivées :

- si $\vec{V}(\beta) = \lambda(\beta)\vec{U}(\beta)$, alors $\frac{d\vec{V}}{d\beta} = \frac{d\lambda}{d\beta}\vec{U} + \lambda\frac{d\vec{U}}{d\beta}$
- si $\vec{W}(\beta) = \vec{U}(\beta) + \vec{V}(\beta)$, alors $\frac{d\vec{W}}{d\beta} = \frac{d\vec{U}}{d\beta} + \frac{d\vec{V}}{d\beta}$
- si $A(\beta) = \vec{U}(\beta) \cdot \vec{V}(\beta)$, alors $\frac{dA}{d\beta} = \frac{d\vec{U}}{d\beta} \cdot \vec{V} + \frac{d\vec{V}}{d\beta} \cdot \vec{U}$
- si $\vec{W}(\beta) = \vec{U}(\beta) \wedge \vec{V}(\beta)$, alors $\frac{d\vec{W}}{d\beta} = \frac{d\vec{U}}{d\beta} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \frac{d\vec{V}}{d\beta}$

4.2 Dérivée d'un vecteur de norme constante

Soit $\vec{U}(\beta)$ un vecteur de norme constante ($\|\vec{U}\| = \text{cst}$). Ce vecteur n'est pas pour autant constant puisque son orientation peut varier.

$$\frac{dU^2}{d(\beta)} = \frac{d}{d\beta}(\vec{U} \cdot \vec{U}) = 0, \quad \text{donc} \quad 2\vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{d\beta} = 0 \Rightarrow \vec{U} \perp \frac{d\vec{U}}{d\beta}$$

La dérivée d'un vecteur de norme constante est orthogonale à ce vecteur ou nul. C'est le cas des vecteurs unitaires.

Dérivée par rapport au temps d'un vecteur de norme constante

Soit \vec{U} un vecteur de norme constante, situé dans un plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) perpendiculaire à \vec{e}_z . La direction de \vec{U} dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) est représentée par l'angle $\theta(t) = (\vec{U}, \vec{e}_x)$ qui varie en fonction du temps. Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associée au repère $R(O, \mathcal{B})$ fixe :

$$\vec{U} = \|\vec{U}\|(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \text{ ou } \vec{U} = U_x \vec{e}_x + U_y \vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{d\vec{U}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\vec{U}}{d\theta}$$

avec
$$\frac{d\vec{U}}{d\theta} = \|\vec{U}\|(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) = -U_y \vec{e}_x + U_x \vec{e}_y$$

par conséquent
$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -\dot{\theta} U_y \vec{e}_x + \dot{\theta} U_x \vec{e}_y$$

Exprimons $\frac{d\vec{U}}{dt}$ en fonction du vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$:

$$\vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$$

d'où :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \{u_y(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y) + u_x(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x)\}\dot{\theta}$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge (U_x \vec{e}_x + U_y \vec{e}_y) = \vec{\Omega} \wedge \vec{U}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{U}}$$

Remarque : même dans le cas où le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ n'est pas perpendiculaire au vecteur tournant \vec{U} , la relation établie ci-dessus reste valable. En faite *c'est une relation générale pour toute rotation d'un vecteur de norme constante.*

CHAPITRE II

MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL CINÉMATIQUE

1 Définitions

La mécanique : est une branche de la physique qui s'intéresse aux mouvements et aux changements des positions des objets physiques.

La cinématique : Elle permet d'étudier les mouvements d'un mobile, par rapport à un repère de référence, en fonction du temps indépendamment des causes qui les produisent. Elle a pour but de préciser les trajectoires et les lois horaires.

Point matériel : au cours de nos études, on considère que tout système physique est réduit à un point matériel coïncidant avec son centre de gravité et contenant sa masse m .

2 Espace et temps

2.1 L'espace

Le « repos » ou le « mouvement » n'ont pas un sens absolu. Ces notions ne peuvent être définies que relativement à un observateur. Pour décrire le mouvement il est donc nécessaire d'attacher à cet observateur un système d'axes de coordonnées appelé **repère**. Dans l'espace à trois dimensions le repère est constitué de *trois axes orientés* munis d'une origine O (arbitraire) et d'une échelle spatiale.

L'unité l'égale de longueur est le *mètre* du Système International (m).

2.2 Le temps

L'observateur a également besoin de définir une chronologie des événements et donc d'un repère temporel : il s'agit d'un axe orienté indiquant le sens d'écoulement du temps muni d'une origine arbitraire ($t=0$) et d'une échelle des temps donnée par une horloge.

L'unité l'égale de temps est la *seconde* du Système International (s).

Un repère d'espace associé à un repère temporel (c'est-à-dire : un système d'axes attaché à un observateur muni d'une horloge) forme un **Référentiel**. Parler d'un mouvement sans définir le référentiel n'a aucun sens !

En mécanique classique (newtonienne) :

- Le temps est considéré comme absolu. Autrement dit il y a invariance de la durée par changement de référentiel. Dans ce cas, la vitesse V du point matériel est négligeable devant la célérité de la lumière C .
- L'espace est supposé à trois dimensions, euclidien (obéissant à la géométrie d'Euclide), homogène et isotrope. Cet espace est absolu et ces propriétés sont indépendantes de la matière qui s'y trouve.

Histoire :

Au 20ème siècle, trois théories ont bouleversé la physique classique et ont remis en causes les concepts newtoniens :

" La théorie de la *Relativité Restreinte* inventée par A. EINSTEIN en 1905 conduit à abandonner l'hypothèse d'isochronisme des horloges. L'écoulement du temps dépend du référentiel. Il n'y a plus de temps absolu.

" La théorie de la *Relativité Générale* inventée par A. EINSTEIN en 1917 est une théorie relativiste de la gravitation. Cette théorie remet en cause l'idée d'un espace euclidien inerte et indépendant de son contenu matériel.

" Enfin, dans les années 20, la Mécanique Quantique théorie qui cherche à décrire correctement le monde atomique, remet en cause la notion même de trajectoire !

3 Repères et coordonnées

Pour tout observateur, trois coordonnées suffisent à positionner un point dans l'espace à trois dimensions. A ce système de trois coordonnées on associe un repère d'espace $R(O, \mathcal{B})$, d'origine O (point fixe par rapport à l'observateur) et de base $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ généralement orthonormée direct.

Ligne de coordonnées :

- Définition: Une ligne de coordonnée dans un système de coordonnées est le lieu géométrique des points qui ont 2 coordonnées de valeurs fixes.
- En un point M donné, les vecteurs tangents à chaque ligne de coordonnée sont orthogonaux.

Repère associé à un système de coordonnées

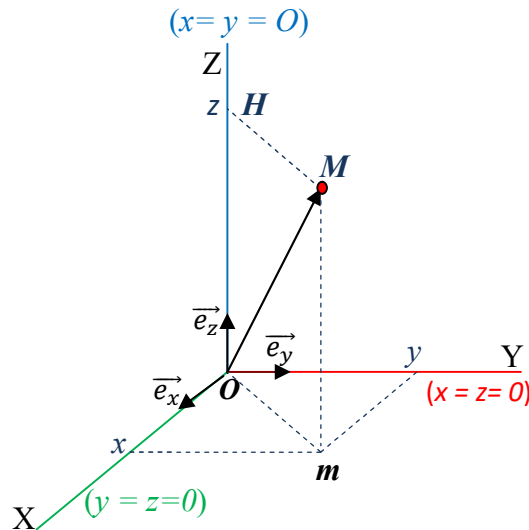
- Un repère associé à un système de coordonnées peut alors être construit en choisissant des vecteurs unitaires tangents aux lignes de coordonnées.
- En général, on distingue trois repères d'espace usuels : le repère **cartésien**, le repère **cylindrique** et le repère **sphérique**.

3.1 Repère cartésien

Le repère cartésien est constitué de trois vecteurs unitaires **fixes** dans le référentiel choisi. Les trois vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ déterminent les trois directions usuelles de l'espace $\{[OX], [OY], [OZ]\}$. La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O et des coordonnées (x, y, z) . Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OH} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

m est le projeté de M dans le plan (XOY) et H est le projeté orthogonal de M sur l'axe (OZ) .



Lignes de coordonnées en
coordonnées cartésiennes

&

Repère associé aux
coordonnées cartésiennes

Le repère cartésien est celui auquel on pense le plus souvent, mais ce n'est pas forcément le plus adapté à la symétrie du problème, notamment lorsque les points matériels se déplacent sur des cercles.

3.2 Repère cylindrique

Lorsqu'on étudie le mouvement de rotation d'un point M autour d'un axe, on introduit pour simplifier les calculs le système de coordonnées cylindriques. Dans ce système, le point M est repéré par :

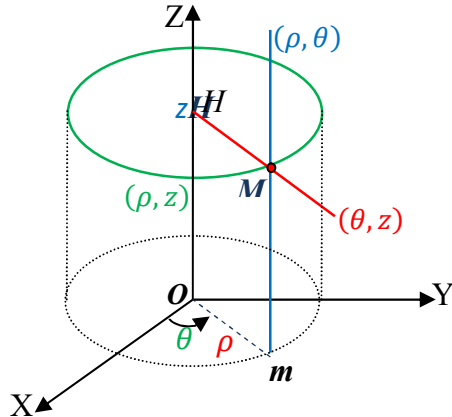
- $\rho = \|\vec{Om}\| = \|\vec{HM}\|$ le rayon polaire : distance du point M à l'axe (OZ) ;
- $\theta = (\vec{e}_x, \vec{Om})$ l'angle polaire ;
- et z la cote du point M .

Avec $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in]-\infty, +\infty[$

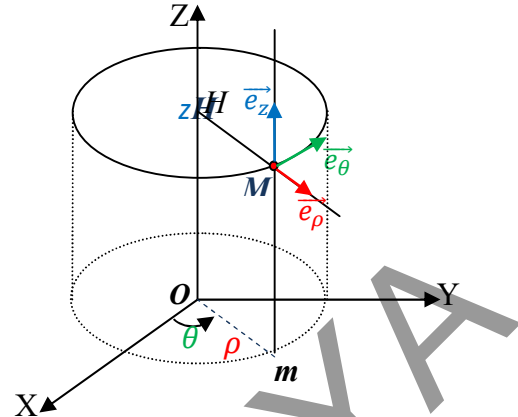
La base **locale mobile** $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ du repère cylindrique associée à ce système de coordonnées est tel que :

- \vec{e}_ρ vecteur unitaire tangent à la ligne de coordonnée (θ, z) , obtenue en faisant croître ρ à θ et z constant : la ligne de coordonnées (θ, z) est la droite radiale (HM) . \vec{e}_ρ est orienté dans le sens des ρ croissants.
- \vec{e}_θ est un vecteur unitaire tangent en M à la ligne de coordonnée (ρ, z) qui est le cercle de centre H et de rayon ρ dans le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. \vec{e}_θ est orienté dans le sens des θ croissants.
- \vec{e}_z vecteur unitaire de la base cartésienne parallèle à l'axe (OZ) .

Lignes de coordonnées en coordonnées cylindriques



Repère associé aux coordonnées cylindriques



Le vecteur position s'écrit alors dans la base orthonormée directe du repère cylindrique :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{MH} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

Le passage du système cartésien au système cylindrique s'effectue grâce à la transformation :

$$x = \rho \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = \rho \sin(\theta)$$

Lorsque le mouvement est plan ($z = 0$) on se place dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, on a alors

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho.$$

3.3 Repère sphérique

Lorsque les grandeurs physiques, en un point M quelconque de l'espace, dépendent de la distance r à un certain point OM peut être décrit par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

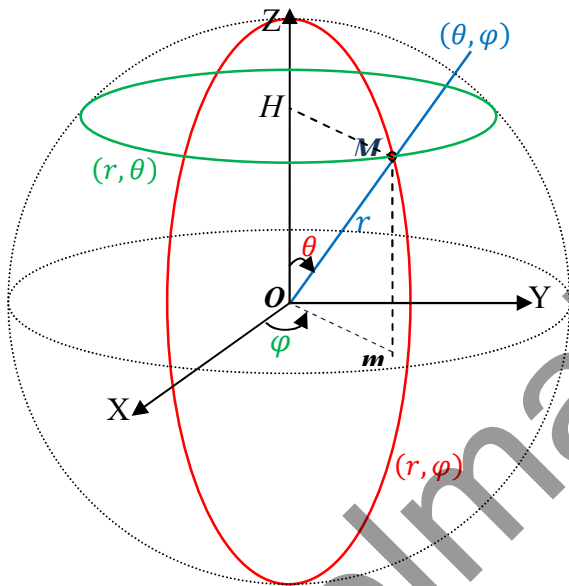
- $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ est la distance radiale ;
- $\theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$ définit la colatitude ;
- $\varphi = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om})$ définit la longitude.

Avec $r > 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$.

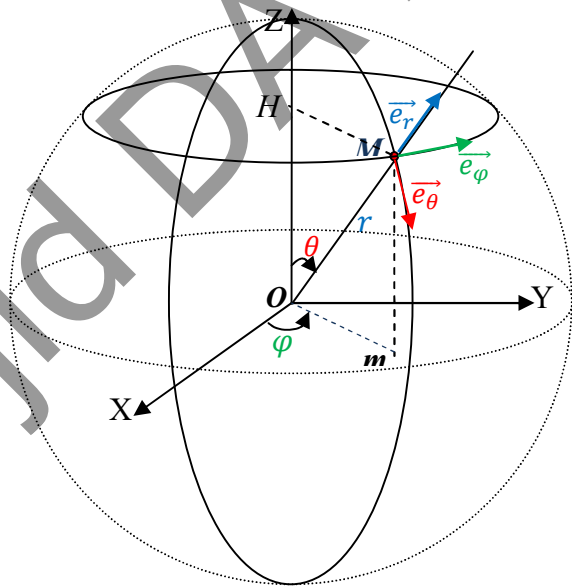
La base **locale mobile** $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ du repère sphérique associée à ce système de coordonnées est tel que :

- \vec{e}_r est un vecteur unitaire tangent à la ligne de coordonnée (θ, φ) , obtenue en faisant croître r à θ et φ constants : la ligne de coordonnées (θ, φ) est la droite radiale (OM) et \vec{e}_r est un vecteur perpendiculaire à la sphère de centre O et de rayon r , orienté dans le sens des r croissants.
- \vec{e}_θ est un vecteur unitaire tangent en M à la ligne de coordonnée (r, φ) qui est l'arc du cercle de centre O et de rayon r dans le plan (OZ, OM) . \vec{e}_θ est orienté dans le sens des θ croissants.
- \vec{e}_φ est un vecteur unitaire tangent en M à la ligne de coordonnée (r, θ) qui est le cercle de centre H et de rayon $r \sin \theta$ dans le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. \vec{e}_φ est orienté dans le sens des φ croissants.

Lignes de coordonnées en coordonnées sphériques



Repère associé aux coordonnées sphériques



Le vecteur position s'écrit alors dans la base orthonormée directe du repère sphérique :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)}$$

Le passage du système cartésien au système sphérique s'effectue grâce à la transformation

$$x = r \sin \theta \cos \varphi ; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad \text{et} \quad z = r \cos \theta$$

4 Description du mouvement

Décrire le mouvement d'un point M par rapport à un référentiel \mathcal{R} c'est donné son **équation horaire**. L'équation horaire est l'équation qui permet de repérer le point M à chaque instant. Il existe plusieurs façons de repérer un point M au cours du temps :

- Soit on définit le vecteur position $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ à chaque instant dans l'un des repères que nous avons présenté. On obtient alors l'équation paramétrique de la trajectoire en fonction d'un paramètre qui est précisément le temps. Exemple : en coordonnées cartésiennes, l'ensemble $\{x(t), y(t), z(t)\}$ constitue l'équation paramétrique de la trajectoire.
La trajectoire est la courbe de l'espace formée par l'ensemble des positions occupées par le point M au cours du temps. Son équation s'obtient en éliminant le temps de l'équation paramétrique.
- Soit - si la trajectoire est connue - on utilise l'abscisse curviligne $s(t)$ qui est une mesure algébrique de la distance d'arc $\widehat{M_0M}(t)$ le long de la trajectoire. M_0 étant un point origine arbitraire sur la trajectoire. Le repère utilisé dans ce cas dit **repère de Frenet** est construit à partir de la courbure de trajectoire.

ATTENTION : il ne faut pas confondre les concepts de référentiel et de repère d'espace. Dans un référentiel donné, le même mouvement d'un mobile peut être décrit mathématiquement en utilisant des repères d'espace différents. Ces repères sont dits des repères de projections. Par contre le mouvement d'un mobile ne sera pas le même suivant le référentiel dans lequel l'observateur se situe.

- Le repère peut être fixe c.-à-d. lié au référentiel
- Le repère peut être mobile c.-à-d. associé au déplacement du point matériel

Dans toute la suite de ce chapitre le mouvement du point M est décrit dans le référentiel \mathcal{R} (référentiel d'étude) lié au repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les dérivées par rapport au temps sont donc effectuées dans \mathcal{R} .

La cinématique dans un référentiel \mathcal{R} est caractérisée par trois vecteurs :

- $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ est le vecteur position ;
- $\vec{V}(t) = \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$ est la vitesse du point M dans \mathcal{R} ;
- $\vec{a}(t) = \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}}$ est l'accélération du point M dans \mathcal{R} .

Dans la suite de ce chapitre la dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R} \left(\frac{d}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$ sera noté de façon simplifiée (sauf confusion) par $\left(\frac{d}{dt} \right)$.

4.1 Cinématique dans le repère cartésien

4.1.1 Expression du vecteur position

En coordonnées cartésiennes le vecteur position s'écrit simplement :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

Expression du vecteur vitesse

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \\ &= \left(\frac{dx}{dt} \vec{e}_x + x \frac{d\vec{e}_x}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt} \vec{e}_y + y \frac{d\vec{e}_y}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{dt} \vec{e}_z + z \frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)\end{aligned}$$

Dans le repère cartésien les vecteurs de la base sont fixes par rapport au référentiel \mathcal{R} choisi.

Soit : $\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0$

Il vient alors :

$$\vec{V} = \left(\frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z\right) \quad \text{ou} \quad \vec{V} = (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z) \quad \text{ou} \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

4.1.2 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt} \vec{V} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \right) \\ &= \left(\frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{dx}{dt} \frac{d\vec{e}_x}{dt} \right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{dy}{dt} \frac{d\vec{e}_y}{dt} \right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z + \frac{dz}{dt} \frac{d\vec{e}_z}{dt} \right)\end{aligned}$$

De même : $\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0$

Il reste :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

4.2 Cinématique dans le repère cylindrique

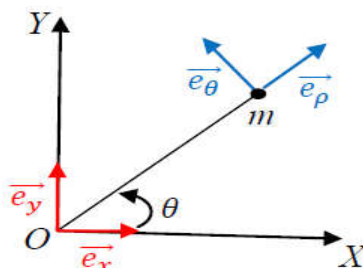
4.2.1 Expression du vecteur position

En coordonnées cylindriques le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

Les relations de passages de la base du repère cylindrique à celle du repère cartésien (ou inversement) sont données par :

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos \theta \cdot \vec{e}_x + \sin \theta \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \cdot \vec{e}_x + \cos \theta \cdot \vec{e}_y\end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned}\vec{e}_x &= \cos \theta \cdot \vec{e}_\rho - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y &= \sin \theta \cdot \vec{e}_\rho + \cos \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$



4.2.2 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit de celui du vecteur position :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) \\ &= \left(\frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right) + \left(\frac{dz}{dt} \vec{e}_z + z \frac{d\vec{e}_z}{dt} \right)\end{aligned}$$

Le repère cylindrique est un repère de projection mobile dans le référentiel \mathcal{R} . Par rapport à \mathcal{R} , le repère cylindrique est en rotation autour de l'axe (OZ) et le vecteur de rotation instantané vaut

$$\vec{\Omega}_{cy} = \dot{\theta} \vec{e}_z$$

Ainsi dans \mathcal{R} , les dérivées par rapport au temps des vecteurs unitaires de la base du repère cylindrique sont (dérivée d'un vecteur de norme constante) :

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_z = \vec{\Omega}_{cy} \wedge \vec{e}_z = 0 ; \frac{d}{dt} \vec{e}_\rho = \vec{\Omega}_{cy} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \vec{e}_\theta = \vec{\Omega}_{cy} \wedge \vec{e}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho$$

Il vient alors :

$$\vec{V} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$$

4.2.3 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt} \vec{V} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z) \\ &= \left(\frac{d\dot{\rho}}{dt} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right) + \left(\rho \dot{\theta} \frac{d}{dt} \vec{e}_\theta + \rho \frac{d}{dt}(\dot{\theta} \vec{e}_\theta) + \frac{d}{dt}(\rho) \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right) + \left(\frac{d\dot{z}}{dt} \vec{e}_z + \dot{z} \frac{d\vec{e}_z}{dt} \right)\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$$

4.3 Cinématique dans le repère sphérique

4.3.1 Expression du vecteur position

En coordonnées sphériques le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

Les relations de passage de la base du repère sphérique à celle du repère cartésien sont données par :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y\end{aligned}$$

4.3.2 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit de celui du vecteur position :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \vec{e}_r) = \left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)$$

Le repère sphérique est un repère de projection mobile dans le référentiel \mathcal{R} . Dans \mathcal{R} , le repère sphérique tourne avec un vecteur rotation instantané :

$$\vec{\Omega}_{sph} = \dot{\theta} \vec{e}_\varphi + \dot{\phi} \vec{e}_z$$

Exprimé dans la base du repère sphérique donne :

$$\vec{\Omega}_{sph} = \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \dot{\phi} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi$$

Ainsi dans \mathcal{R} , les dérivées par rapport au temps des vecteurs unitaires de la base du repère sphérique sont (dérivée d'un vecteur de norme constante) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{e}_r &= \vec{\Omega}_{sph} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{d}{dt} \vec{e}_\theta &= \vec{\Omega}_{sph} \wedge \vec{e}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{d}{dt} \vec{e}_\varphi &= \vec{\Omega}_{sph} \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

L'expression de la vitesse est donc :

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

4.3.3 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse :

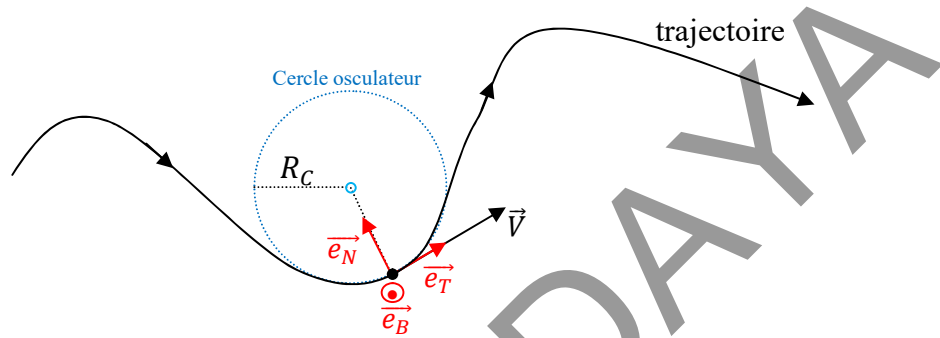
$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} \vec{V} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\varphi) \\ &= \left(\ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d}{dt} \vec{e}_r \right) + \left(\dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d}{dt} \vec{e}_\theta \right) \\ &\quad + \left(\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \ddot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\phi} \sin \theta \frac{d}{dt} \vec{e}_\varphi \right) \end{aligned}$$

En utilisant les expressions des dérivées des vecteurs de la base sphérique et à après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{ \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \} \vec{e}_r + \{ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \} \vec{e}_\theta \\ &\quad + \{ 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta \} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

4.4 Cinématique dans le repère de Frenet

Le repère de Frenet a pour origine le point M et comme base un trièdre orthonormé direct $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B)$. Cette base mobile est telle qu'à chaque instant le vecteur \vec{e}_T est tangent à la courbe trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement, \vec{e}_N est orthogonal à \vec{e}_T et dirigé selon la concavité de la trajectoire, vers le centre du cercle localement tangent à la trajectoire (**cercle osculateur**). Le plan formé par les vecteurs \vec{e}_T et \vec{e}_N est aussi appelé le plan **osculateur** au point M considéré. \vec{e}_B forme avec les deux autres vecteurs un trièdre direct ($\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N$), il est ainsi appelé vecteur binormale.



4.4.1 Expression du vecteur position

Dans le repère de Frenet il est impossible d'écrire de manière explicite le vecteur position \vec{OM} . Nous définissons ce pendant l'abscisse curviligne $s(M)$ de M le long de la trajectoire comme étant la mesure algébrique de la longueur de l'arc $\widehat{M_0M}$ (M_0 est un point de la trajectoire pris comme origine).

$$s(t) = \widehat{M_0M}(t)$$

4.4.2 Expression du vecteur vitesse

La vitesse étant tangente à la trajectoire, on a donc :

$$\vec{V} = V \vec{e}_T$$

La norme de la vitesse s'écrit

$$V = \frac{dl}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

Ainsi on peut écrire

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_T = \dot{s} \vec{e}_T$$

Le vecteur \vec{e}_T peut être défini comme :

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{V}}{V}$$

où en utilisant l'expression $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_T$ on obtient une deuxième définition de \vec{e}_T :

$$\vec{e}_T = \frac{d\vec{OM}}{ds}$$

4.4.3 Expression du vecteur accélération

L'accélération s'obtient en dérivant le vecteur vitesse, il vient donc :

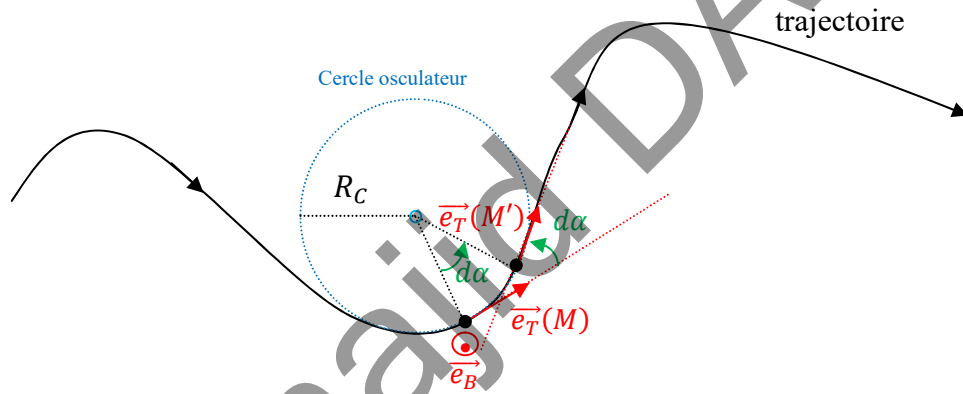
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V \vec{e}_T) = \frac{dV}{dt} \vec{e}_T + V \frac{d\vec{e}_T}{dt}$$

Or d'après la formule de dérivation d'un vecteur de norme constante on a

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \vec{\Omega}(\vec{e}_T / \mathcal{R}) \wedge \vec{e}_T$$

Le vecteur de rotation $\vec{\Omega}(\vec{e}_T / \mathcal{R})$ de \vec{e}_T par rapport au repère lié à \mathcal{R} peut être exprimé en fonction de l'abscisse curviligne s et du rayon de courbure R_C du cercle osculateur. En effet, pendant la durée dt , le vecteur \vec{e}_T tourne d'un angle élémentaire $d\alpha$ autour de l'axe orienté suivant \vec{e}_B . Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\vec{e}_T / \mathcal{R})$ vaut alors :

$$\vec{\Omega}(\vec{e}_T / \mathcal{R}) = \frac{d\alpha}{dt} \vec{e}_B$$



Avec

$$R_C d\alpha = ds$$

Il vient alors :

$$\vec{\Omega}(\vec{e}_T / \mathcal{R}) = \frac{1}{R_C} \frac{ds}{dt} \vec{e}_B$$

Par conséquent

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{1}{R_C} \frac{ds}{dt} \vec{e}_B \wedge \vec{e}_T = \frac{1}{R_C} \frac{ds}{dt} \vec{e}_N$$

Ou bien

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{V}{R_C} \vec{e}_N$$

En fin, on peut donner l'expression de l'accélération

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{e}_T + \frac{V^2}{R_C} \vec{e}_N$$

On voit que l'accélération tangentielle $\frac{dV}{dt}$ mesure la variation de vitesse, alors que l'accélération normale $\frac{V^2}{R_C}$ est liée à la courbure de la trajectoire.

Remarque :

Le rayon de courbure de la trajectoire peut être calculé :

- Soit à partir de la composante normale de l'accélération a_N :

$$R_C = \frac{V^2}{a_N}$$

- Soit à partir du module du produit vectoriel de \vec{V} et \vec{a} :

$$\vec{V} \wedge \vec{a} = V \vec{e}_T \wedge \left(\frac{dV}{dt} \vec{e}_T + \frac{V^2}{R_C} \vec{e}_N \right) = \frac{V^3}{R_C} \vec{e}_B$$

$$R_C = \frac{V^3}{\|\vec{V} \wedge \vec{a}\|}$$

5 Quelques mouvements simples

5.1 Mouvement rectiligne

La trajectoire est une droite pris comme axe des abscisses $x(t)$ orienté dans le sens du mouvement. La vitesse et l'accélération sont dirigées suivant la trajectoire :

$$\vec{V} = \dot{x} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$$

On peut distinguer deux cas simple :

- Mouvement **rectiligne uniforme** : la vitesse V est constante, l'accélération est nulle et l'équation horaire est donnée par :

$$x(t) = Vt + x_0$$

- Mouvement **rectiligne uniformément accéléré (retardé)** : l'accélération a est constante

$$\ddot{x} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = V = at + V_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} at^2 + V_0 t + x_0$$

Avec V_0 et x_0 sont respectivement la vitesse et l'abscisse du point à l'instant $t = 0$.

Dans ce cas la distance $(x_2 - x_1)$ parcourue entre deux instants t_1 et t_2 est telle que :

$$V_2^2 - V_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

5.2 Mouvement circulaire

La trajectoire est un cercle qu'on prendra de rayon R constant et de centre O . L'étude dans le repère polaire est plus adaptée pour ce mouvement. Nous décrivons donc le mouvement par les coordonnées : $\rho = R$ et $\theta(t)$

$$\vec{OM} = R \vec{e}_\rho, \quad \vec{V} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

- Mouvement **circulaire uniforme** : le mouvement se fait à vitesse ($V = R\dot{\theta}$) constante :

$$\dot{\theta} = \omega \quad \Rightarrow \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

$$\vec{V} = R\omega \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_\rho$$

CHAPITRE III

MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

Dans tout ce chapitre, les deux repères $(O_1; \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_{z1})$ et $(O_2; \vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2}, \vec{e}_{z2})$ sont liés respectivement aux deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 .

Soit un point matériel M en mouvement dans un référentiel \mathcal{R}_2 , lui-même en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R}_1 . Nous appellerons :

- Mouvement **absolu**, le mouvement de M par rapport à \mathcal{R}_1 ;
- Mouvement **relatif**, le mouvement de M par rapport à \mathcal{R}_2 ;
- Mouvement **d'entraînement**, le mouvement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 .

L'objet de ce chapitre est de relier le mouvement absolu avec le mouvement relatif d'un point M , connaissant le mouvement d'entraînement du référentiel relatif \mathcal{R}_2 par rapport au référentiel absolu \mathcal{R}_1 .

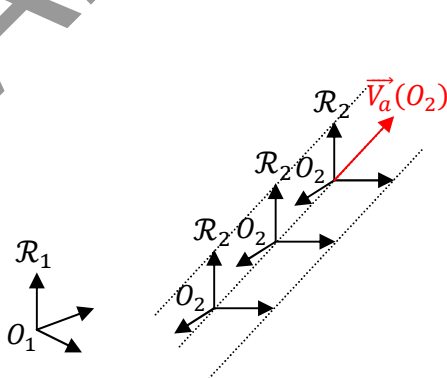
Caractérisons tout d'abord le mouvement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 .

1 Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

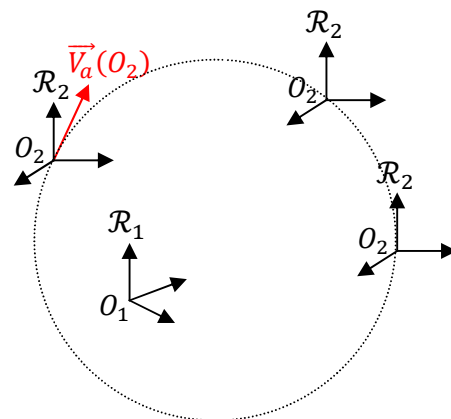
Le mouvement général d'un référentiel \mathcal{R}_2 par rapport à un référentiel \mathcal{R}_1 se décompose en deux mouvements type : translation et rotation

- Mouvement de translation : \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1 (sans rotation) si les vecteurs \vec{e}_{x2} , \vec{e}_{y2} et \vec{e}_{z2} conservent la même direction et le même sens au cours du temps, par rapport à tout observateur lié à \mathcal{R}_1 . Dans ce cas on a :

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{e}_{y2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{e}_{z2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$$



Translation rectiligne



Translation circulaire

- Si O_2 décrit une droite, on parle alors de translation rectiligne.
- Si O_2 décrit un cercle, on parle de translation circulaire.
- Si O_2 décrit une courbe quelconque, on parle de translation curviligne.
- Mouvement de rotation : dans ce cas

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}, \quad \left(\frac{d\vec{e}_{y2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} \text{ et } \left(\frac{d\vec{e}_{z2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} \text{ sont } \neq \vec{0}$$

Les vecteurs $\vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2}$ et \vec{e}_{z2} sont en rotation par rapport à \mathcal{R}_1 . Pour ces derniers, le vecteur rotation instantané est le même, car ils sont « rigidement » liés les uns aux autres, et il est égale au vecteur rotation instantané du référentiel \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 noté $\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}$.

En appliquant la formule de dérivation d'un vecteur tournant de norme constante par rapport au temps on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{e}_{x2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} &= \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{e}_{x2}; & \left(\frac{d\vec{e}_{y2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} &= \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{e}_{y2} \\ \text{et } \left(\frac{d\vec{e}_{z2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} &= \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{e}_{z2} \end{aligned}$$

Ces relations représentent la définition générale du vecteur rotation instantané. Noter que le vecteur rotation peut varier en norme (rotation fixe avec une vitesse angulaire variable) mais aussi en direction (l'axe de rotation n'est pas fixe).

Ainsi dans le cas général, le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre est la composition d'une translation et d'une rotation.

2 Dérivation d'un vecteur par rapport au temps

La cinématique est basée en grande partie sur la dérivée temporelle des fonctions vectorielles. Sachant que cette dérivée dépend du référentiel de l'observateur, nous cherchons à établir une formule de dérivation reliant la dérivée temporelle d'une fonction vectorielle $\vec{U}(t)$ dans les deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 .

Exprimons $\vec{U}(t)$ dans la base $(\vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2}, \vec{e}_{z2})$:

$$\vec{U} = U_{x2}\vec{e}_{x2} + U_{y2}\vec{e}_{y2} + U_{z2}\vec{e}_{z2}$$

La dérivée de $\vec{U}(t)$ dans \mathcal{R}_2 est donnée par :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} = \frac{dU_{x2}}{dt}\vec{e}_{x2} + \frac{dU_{y2}}{dt}\vec{e}_{y2} + \frac{dU_{z2}}{dt}\vec{e}_{z2}$$

les vecteurs \vec{e}_{x2} , \vec{e}_{y2} et \vec{e}_{z2} sont des vecteurs constants dans \mathcal{R}_2 .

La dérivée de $\vec{U}(t)$ dans \mathcal{R}_1 est donnée par :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \frac{dU_{x2}}{dt}\vec{e}_{x2} + \frac{dU_{y2}}{dt}\vec{e}_{y2} + \frac{dU_{z2}}{dt}\vec{e}_{z2} + U_{x2}\left(\frac{d\vec{e}_{x2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + U_{y2}\left(\frac{d\vec{e}_{y2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + U_{z2}\left(\frac{d\vec{e}_{z2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$$

Les vecteurs \vec{e}_{x2} , \vec{e}_{y2} et \vec{e}_{z2} ne sont pas des vecteurs constants dans \mathcal{R}_1 . Leurs dérivées sont données dans le paragraphe 1.

Il vient alors :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge (U_{x2}\vec{e}_{x2} + U_{y2}\vec{e}_{y2} + U_{z2}\vec{e}_{z2})$$

D'où :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{U}$$

Remarques importantes :

- La dérivée est invariante par changement de référentiel si :
 - $\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} = 0$, \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont en translation ;
 - $\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} // \vec{U}$
- $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} - \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{U} \Rightarrow \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2)} = -\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}$
- Composition des vecteurs rotations : $\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1)} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}$

Démonstration :

soient trois référentiels et une fonction vectorielle quelconque $\vec{U}(t)$. Nous avons :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{U}$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2)} \wedge \vec{U}$$

$$d'où \quad \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_3} + (\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2)}) \wedge \vec{U}$$

$$\text{de plus} \quad \left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{U}$$

En identifiant les termes des deux dernières relations on obtient la formule de composition des vecteurs rotations : $\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1)} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}$.

3 Loi de composition des vitesses

La loi de composition des vitesses est la relation qui lie la vitesse $\vec{V}_a(M)$ d'un point M dans le référentiel absolu \mathcal{R}_1 à la vitesse $\vec{V}_r(M)$ du point M dans le référentiel relatif \mathcal{R}_2 .

$\vec{V}_a(M) = \left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1}$ est appelé vitesse absolue du point M ;

$\vec{V}_r(M) = \left(\frac{d\vec{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2}$ est appelé vitesse relative du point M .

La relation liant les vecteurs positions du point M dans les deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 est simplement : $\vec{O_1M} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2M}$

Pour obtenir la loi de composition des vitesses, dérivant par rapport au temps le vecteur position $\vec{O_1M}$ dans \mathcal{R}_1 en utilisant la formule de dérivation vectorielle. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \vec{V}_a(M) &= \left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\vec{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \\ &= \left(\frac{d\vec{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{O_2M} + \left(\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \end{aligned}$$

Le premier terme s'identifie à la vitesse relative du point M dans \mathcal{R}_2 :

$$\vec{V}_r(M) = \left(\frac{d\vec{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2}$$

Le terme $\left(\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{O_2M}$ est appelé vitesse d'entraînement du point M , on le note $\vec{V}_e(M)$:

$$\vec{V}_e(M) = \left(\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{O_2M}$$

La vitesse $\vec{V}_e(M)$ est liée au déplacement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 :

- $\left(\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{V}(O_2)_{/\mathcal{R}_1}$ exprime la translation de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 ;
- $\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \vec{O_2M}$ exprime la rotation de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 .

La signification de la vitesse d'entraînement s'explique par la notion de **point coïncident**.

Par définition, le point coïncident de M à l'instant t dans le référentiel \mathcal{R}_2 est le point M^* , **fixe dans \mathcal{R}_2** , qui occupe la même position que M à l'instant t .

La vitesse dans \mathcal{R}_1 du point coïncident M^* à l'instant t exprimée à partir de la loi de composition des vitesses est :

$$\vec{V}(M^*)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overline{O_2M^*}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} + \left(\frac{d\overline{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \overline{O_2M^*}$$

$$\left(\frac{d\overline{O_2M^*}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} = \vec{0} \text{ puisque } M^* \text{ est fixe dans } \mathcal{R}_2 \text{ et } \overline{O_2M^*} = \overline{O_2M} \text{ à l'instant } t.$$

Il vient alors :

$$\vec{V}(M^*)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overline{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \overline{O_2M} = \vec{V}_e(M)$$

$\vec{V}_e(M)$ est donc la vitesse dans \mathcal{R}_1 du point M , s'il était fixe dans \mathcal{R}_2 (point coïncident)

La loi de composition des vitesses peut être écrite de façon simplifiée comme :

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

4 Loi de composition des accélérations

La loi de composition des accélérations est la relation qui lie l'accélération $\vec{a}_a(M)$ d'un point M dans le référentiel absolu \mathcal{R}_1 à l'accélération $\vec{a}_r(M)$ du point M dans le référentiel relatif \mathcal{R}_2 .

$\vec{a}_a(M) = \left(\frac{d^2\overline{O_1M}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_1}$, l'accélération absolue du point M par rapport au référentiel absolu \mathcal{R}_1 ;

$\vec{a}_r(M) = \left(\frac{d^2\overline{O_2M}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_2}$, l'accélération relative du point M par rapport au référentiel relatif \mathcal{R}_2 .

En dérivant la formule de composition des vitesses, en utilisant la formule de dérivation vectorielle, on obtient la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}_a(M) = \left(\frac{d^2\overline{O_1M}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}_r(M) + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \overline{O_2M} + \left(\frac{d\overline{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \right]_{/\mathcal{R}_1}$$

Calculons la dérivée dans \mathcal{R}_1 de chaque terme. Pour alléger les notations, convenons que $\vec{\Omega}$ signifie $\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}$, que \vec{V} signifie $\vec{V}(M)$ et que le mobile est M . Il vient :

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \right]_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_1}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{a_r}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M})_{/\mathcal{R}_1} &= \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \\ &= \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega} \wedge \left[\left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M} \right] \\ &= \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}(M) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}) \end{aligned}$$

En regroupant tous ces termes, nous obtenons la relation de composition des accélérations :

$$\overrightarrow{a_a}(M) = \overrightarrow{a_r}(M) + \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}) + 2 \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$$

L'accélération du point coïncident M^* par rapport à \mathcal{R}_1 est appelée **accélération d'entraînement** du point M , et elle se note $\overrightarrow{a_e}(M)$. Son expression peut être obtenue en utilisant la relation de composition des accélérations ($\overrightarrow{a_e}(M) = \vec{a}(M^*)_{/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{a_a}(M^*)$):

M^* est fixe par rapport à \mathcal{R}_2 , donc $\overrightarrow{a_r}(M^*) = 0$ et $\overrightarrow{V_r}(M^*) = 0$

et sachant qu'à l'instant t $\overrightarrow{O_2M^*} = \overrightarrow{O_2M}$, il vient alors :

$$\overrightarrow{a_e}(M) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M})$$

$\overrightarrow{a_e}(M)$ est l'accélération dans \mathcal{R}_1 du point M , s'il était fixe dans \mathcal{R}_2 (point coïncident)

Remarque : l'accélération d'entraînement n'est pas égale à la dérivée dans \mathcal{R}_1 de la vitesse d'entraînement ($\overrightarrow{a_e}(M) \neq \left(\frac{d\overrightarrow{V_e}(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1}$)

La loi de composition des accélérations peut être écrite de façon simplifiée comme :

$$\overrightarrow{a_a}(M) = \overrightarrow{a_r}(M) + \overrightarrow{a_e}(M) + 2 \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$$

Par comparaison avec la relation de composition des vitesses, il apparaît un terme complémentaire, nommé **accélération de Coriolis** :

$$\overrightarrow{a_c}(M) = 2 \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$$

5 Cas particuliers

5.1 Cas où \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1 .

$$\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} = 0 \quad \Rightarrow$$

- $\vec{V}_e(M) = \vec{V}_a(O_2)$ et $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_a(O_2)$: tous les points liés à \mathcal{R}_2 ont même vitesse et même accélération par rapport à \mathcal{R}_1 .
- $\vec{a}_c(M) = 0$

Donc la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_a(O_2)$$

Et celle des accélérations est donnée par :

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_a(O_2)$$

5.2 Cas où \mathcal{R}_2 est en rotation uniforme par rapport à \mathcal{R}_1 autour d'un axe fixe.

Supposons que le référentiel \mathcal{R}_2 soit en rotation uniforme autour d'un axe fixe (Δ) par rapport à \mathcal{R}_1 . On note $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation et on place O_2 en O_1 .

Le mouvement d'entraînement du point M (mouvement du point coïncident M^*) est circulaire uniforme de centre H , le projeté orthogonal de M sur l'axe (Δ) , de rayon HM et de vitesse angulaire constante Ω . Dans ce cas :

- La vitesse d'entraînement s'écrit : $\vec{V}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}$

Et la loi de composition des vitesses est : $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}$

- L'accélération d'entraînement est centripète dirigée de M vers H et de norme $HM\Omega^2$:

$$\vec{a}_e(M) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

La loi de composition des accélérations est :

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) - \Omega^2 \overrightarrow{HM} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r(M)$$

CHAPITRE IV

MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL DYNAMIQUE

1 Définitions

La dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui les produisent. Ces causes portent le nom d'interactions et elles sont représentées, en mécanique classique, par des vecteurs appelés forces.

Point matériel : au cours de nos études, on considère que tout système physique est réduit à un point matériel coïncidant avec son centre de gravité et contenant sa masse m . son état (position, mouvement) est complètement décrit à l'aide de trois coordonnées (3 degrés de liberté).

La masse inertielle m d'un point matériel, est un scalaire positif qui représente la propriété d'inertie c'est-à-dire la résistance de ce point à une modification de son mouvement : plus la masse d'un point matériel est grande, plus il est difficile de modifier sa vitesse.

La masse est invariante dans le temps et ne dépend pas du référentiel. C'est une caractéristique intrinsèque du point matériel. L'unité de la masse, dans le système international d'unité, est le kilogramme (symbole : Kg).

2 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel est définie comme le produit de sa masse m par sa vitesse \vec{V} :

$$\vec{P} = m \vec{V}$$

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle colinéaire à la vitesse. C'est une notion physique qui combine entre les deux éléments qui caractérise l'état dynamique du point matériel : sa masse et sa vitesse. Son unité est le m.Kg.s^{-1} . Il s'agit d'une quantité additive : si le système considéré est formé de N points matériels de masse m_i et de vitesse \vec{V}_i alors :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i$$

La quantité de mouvement est une grandeur qui dépend du référentiel d'observation

3 Notion de force

L'action mécanique d'un objet S sur un point matériel M est modélisée par un vecteur lié appelé force et noté $\vec{F}_{S \rightarrow M}$. Chaque force se caractérise par un point d'application, une direction, un sens et une intensité. Elle se mesure en Newton (symbole : N).

La force résultante de plusieurs actions mécanique est égale à la somme vectorielle des forces dues à chacune de ces actions.

Nous admettons que les forces ne dépendent pas du référentiel d'observation.

L'ensemble des forces observées dans la nature ne sont que la manifestation macroscopique de quatre interactions fondamentales de nature différentes : l'interaction gravitationnelle, l'interaction faible, l'interaction forte et l'interaction électromagnétique. Les théories qui décrivent ces quatre interactions ne sont pas encore totalement unifiées. C'est pourquoi, dans ce cours, nous n'envisagerons que les forces dues aux interactions qui sont décrites par la théorie classique (physique Newtonienne).

Deux types de forces sont à considérer :

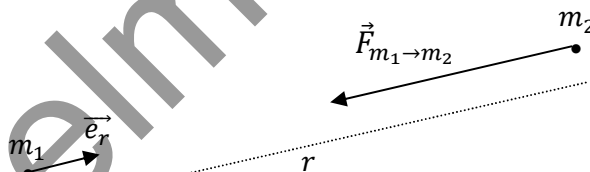
- forces à distance : Gravitationnelles entre masses, électromagnétiques entre charges.
- Forces de contact : tension d'un ressort, réaction d'un support (frottement de glissement), frottement fluide ...

3.1 Forces à distance

Force de gravitation

La force qu'exerce une masse m_1 sur une autre masse m_2 est toujours attractive. Elle s'exprime grâce à la loi de Newton :

$$\vec{F}_{m_1 \rightarrow m_2} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

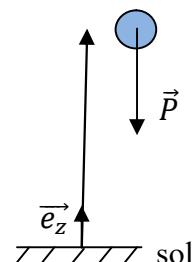


Avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (SI) la constante de gravitation universelle.

Remarque : L'attraction que la Terre (de masse M_T et de rayon R_T) exerce sur un point matériel (de masse m et d'altitude z) proche de la surface, s'appelle le poids de celui-ci et on l'approxime :

$$\vec{P} = - \frac{G M_T m}{(R_T + z)^2} \vec{e}_z \approx - mg \vec{e}_z$$

Avec $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$



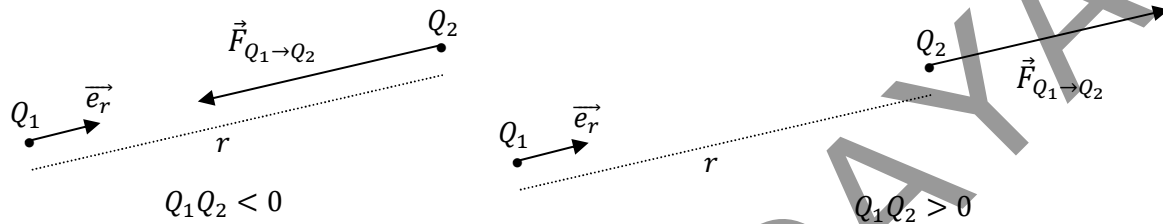
Force électrostatique

La force entre deux particules chargées électriquement est soit attractive soit répulsive. L'état électrique des particules est caractérisé par leur charge électrique Q , scalaire positif ou négatif. Deux charges de même signe se repoussent.

Loi de Coulomb :

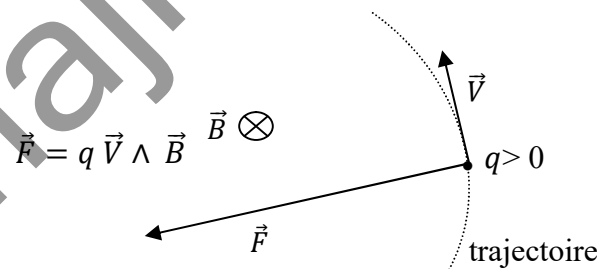
$$\vec{F}_{Q_1 \rightarrow Q_2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ (SI)



Force magnétique

La force magnétique de Lorentz s'exerce sur une particule q chargée en mouvement dans un champ magnétique \vec{B} est perpendiculaire à la vitesse \vec{v} et au champ magnétique.



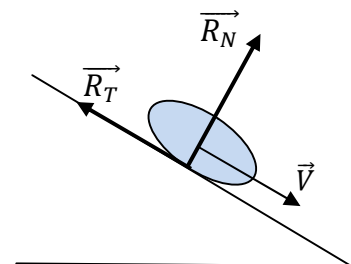
3.2 Forces de contact

Frottements solide / solide

Le contact entre deux solides fait apparaître deux forces : une force normale \vec{R}_N (réaction normale) et une force \vec{R}_T (force de frottement) tangentielle au support et qui s'oppose au glissement

Lois de Coulomb sur le frottement

- Lorsqu'il y a glissement sans frottement on a $R_T = 0$.
- Lorsqu'il y a glissement avec frottement, on a $R_T = f_d R_N$ où f_d désigne le coefficient de frottement dynamique.
- Lorsqu'il n'y a pas glissement, on dit qu'il y a adhérence et l'on a $R_T < f_s R_N$ où f_s désigne le coefficient de frottement statique (on note que $f_s > f_d$).
- La condition de contact est donnée par $R_N > 0$.



Frottements fluide / solide

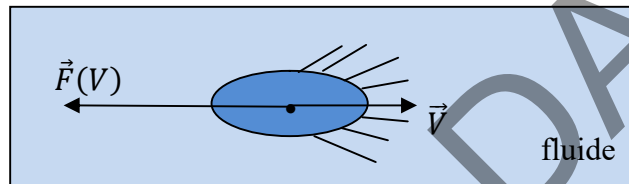
Lorsqu'un corps se déplace dans un fluide (liquide ou gaz) à une vitesse relativement faible, la force de frottement est, en première approximation, proportionnelle à la vitesse et de sens opposé

$$\vec{F}(V) = -\alpha \vec{V}$$

Avec α est un paramètre constant qui dépend de la viscosité du fluide et de la forme du corps.
A des vitesses relativement important $F(V)$ est quadratique :

$$\vec{F}(V) = -h V \vec{V}$$

h est un paramètre constant qui dépend de la masse volumique du fluide et de la forme du corps.

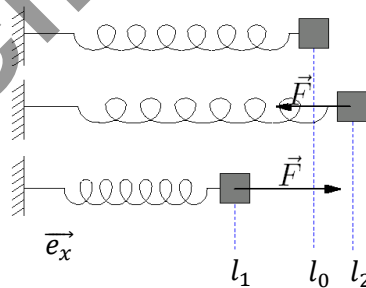


Forces de rappel

Lorsque l'on tire sur un fil (ressort), celui-ci résiste en produisant une force proportionnelle à l'étirement. On dit que le comportement est élastique et la force de rappel élastique s'exprime ainsi :

$$\vec{F} = -k (l - l_0) \vec{e}_x \quad (\text{valable uniquement pour } l - l_0 \ll l_0)$$

avec l_0 la longueur au repos du fil (ressort), l sa longueur et k la constante de raideur (en N/m).



4 Principe d'inertie (ou première loi de Newton) – Référentiels galiléens

4.1 Enoncé de la première loi de Newton

Un point matériel qui n'est soumis à aucune force est dit isolé.

Si les forces exercées sur un point matériel se compensent exactement ($\sum \vec{F} = 0$), alors le point matériel est dit pseudo-isolé.

Le principe d'inertie (ou première loi de Newton) s'applique au point matériel isolé ou pseudo-isolé.

Première loi de Newton

Il existe une classe de référentiels, appelées référentiels galiléens, par rapport auxquels un point matériel isolé (ou pseudo-isolé) est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

Rappelons qu'un mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par un vecteur vitesse constant et donc une accélération nulle.

4.2 Référentiels galiléens

Nous cherchons à établir la relation qui existe entre tous les référentiels galiléens. Sachant que dans tous référentiels galiléens, l'accélération d'un point matériel isolé est nulle.

Considérons deux référentiels galiléens \mathcal{R}_{g1} , \mathcal{R}_{g2} et un point matériel M isolé. Par hypothèse :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{g1}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{g2}} = \vec{0}$$

En utilisant la loi de composition des accélérations on obtient :

$$\vec{a}(O_{g2})_{/\mathcal{R}_{g1}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_{g1}} \wedge \overrightarrow{O_{g2}M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_{g2}M}) + 2 \vec{\Omega}(\mathcal{R}_{g2}/\mathcal{R}_{g1}) \wedge \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_{g2}} = \vec{0}$$

Cette relation doit être vérifiée pour toute position $\overrightarrow{O_{g2}M}$ et pour toute vitesse $\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_{g2}}$ du point M , ce qui se traduit par :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_{g2}/\mathcal{R}_{g1}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}(O_{g2})_{/\mathcal{R}_{g1}} = \vec{0}$$

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_{g2}/\mathcal{R}_{g1}) = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{R}_{g2}$ est en translation par rapport à \mathcal{R}_{g1} ;

$\vec{a}(O_{g2})_{/\mathcal{R}_{g1}} = \vec{0}$: la vitesse des points de \mathcal{R}_{g2} est constant dans $\mathcal{R}_{g1} \Rightarrow \mathcal{R}_{g2}$ est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_{g1} .

Nous pouvons en conclure donc que deux référentiels galiléens sont l'un par rapport à l'autre en translation rectiligne uniforme.

La réciproque est immédiate : si \mathcal{R}_2 est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_{g1} , galiléen, alors les accélérations d'entraînement et de Coriolis sont nulles dans \mathcal{R}_2 , qui est par conséquent galiléen.

On peut énoncer donc, que :

L'ensemble des référentiels galiléens est constitué par tous les référentiels en translation rectiligne et uniforme par rapport à l'un d'entre eux.

Remarque :

Le caractère galiléen d'un référentiel est lié à la validité du principe d'inertie. Le critère de validité dépend de la précision que l'on exige. C'est pourquoi, certains référentiels sont approximativement galiléens sur une certaine échelle de temps.

Dans le paragraphe suivant, nous citons quelques référentiels courants et nous précisons leur caractère galiléen.

4.3 Référentiels usuels de la mécanique newtonienne

Référentiel de COPERNIC \mathcal{R}_C : Repère d'origine le centre d'inertie C du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles dites "fixes" + repère temporel. Il est utilisé en tant que référentiel galiléen, avec une excellente précision, lorsque l'on considère le mouvement d'un point matériel dans le système solaire.

Référentiel de KEPLER \mathcal{R}_K : se déduit du référentiel de COPERNIC par translation : Repère d'origine le centre d'inertie S du soleil et dont les axes sont choisis parallèles à ceux du repère spatial de \mathcal{R}_C + repère temporel.

Rigoureusement, ce référentiel n'est pas galiléen car le Soleil est en mouvement dans notre galaxie, elle décrit autour du noyau galactique une orbite circulaire en une période $T_S = 250.10^6$ années.

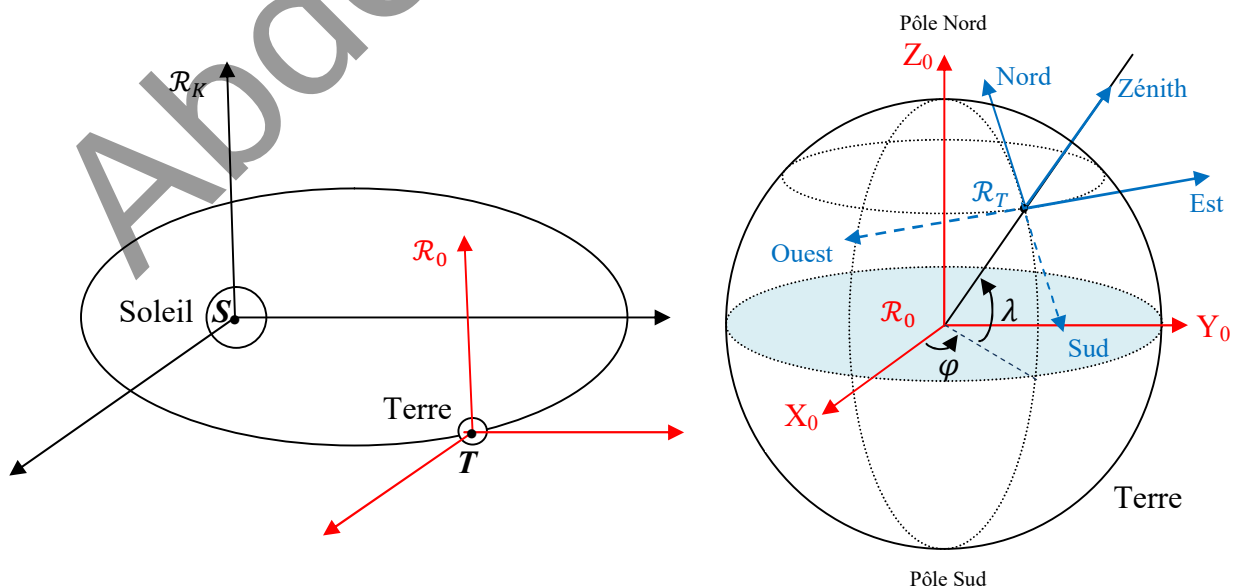
L'approximation consistant à supposer que \mathcal{R}_K est galiléen est en général excellente puisque la durée des expériences humaines est toujours très faible devant T_S .

Référentiel géocentrique \mathcal{R}_0 : Repère dont l'origine est au centre de la TERRE et dont les axes restent parallèles par rapport à \mathcal{R}_K (\mathcal{R}_C) + repère temporel. Ce référentiel est donc en translation quasi-circulaire (l'orbite terrestre n'est pas tout à fait circulaire) par rapport à \mathcal{R}_K (\mathcal{R}_C). La durée de révolution de la terre autour du soleil vaut 365,25 jours (année sidérale).

On peut considérer \mathcal{R}_0 comme galiléen sur des expériences terrestres "peu longues" (une journée maximum), car, dans ce cas, le mouvement du centre de la Terre est alors assimilable à une trajectoire quasi-rectiligne uniforme.

Référentiel terrestre \mathcal{R}_T : Repère d'origine un point de la surface terrestre et d'axes liés à la Terre + repère temporel. Par rapport au référentiel géocentrique \mathcal{R}_0 , ce référentiel est en rotation (période sidérale $T = 23h56min04s$) autour de l'axe des pôles (Sud-Nord).

Ce référentiel bien que rigoureusement non galiléen est souvent traité comme un référentiel galiléen car les effets de la rotation terrestre sont souvent négligeables dans les expériences courantes.



5 Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD) dans un référentiel galiléen – deuxième loi de Newton

La deuxième loi de la dynamique est la RFD qui relie la dynamique (les causes : forces) et la cinématique (les effets : courbure et accélération).

Enoncé de la RFD :

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , un point matériel M soumis à une résultante des forces $\sum \vec{F}$ voit sa quantité de mouvement \vec{P} varier d'autant plus vite que la résultante des forces $\sum \vec{F}$ est importante. L'équation du mouvement est donnée par :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{qui devient, lorsque la masse } m \text{ du point matériel ne varie pas au cours du temps} \quad \sum \vec{F} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$$

La RFD est une équation différentielle dont la résolution donne l'équation horaire de la trajectoire à condition de connaître les conditions initiales.

Remarques :

- Conformément au principe d'inertie, un point matériel soumis à une force résultante nulle (isolé ou pseudo-isolé) n'est pas accéléré ($\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$ c.-à-d. M est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme).
- Si M est dans une position d'équilibre, son accélération est nulle et la somme des forces appliquées à M est nulle.

6 Principe d'action et de réaction – troisième loi de Newton

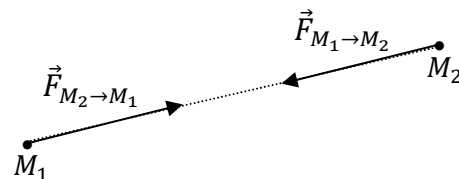
Enoncé:

Soient deux points matériels M_1 et M_2 en interaction. Les forces d'interaction $\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2}$ et $\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}$ sont opposées et colinéaires à l'axe $(M_1 M_2)$.

Ce principe d'action et de réaction (principe des actions réciproques) se traduit par :

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}$$

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{0}$$



7 Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD) dans un référentiel non galiléen

Soient \mathcal{R}_g un référentiel fixe galiléen et \mathcal{R} un référentiel mobile non galiléen

Prenons comme point de départ la RFD :

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$$

appliquée au mouvement d'un point matériel M dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Nous désirons décrire le mouvement de M par rapport au référentiel mobile \mathcal{R} . On doit transformer l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$, en utilisant la loi de composition des accélérations, pour passer dans le référentiel \mathcal{R} .

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = m \vec{a}(M/\mathcal{R}) + m \vec{a}_e(M) + m \vec{a}_c(M)$$

L'observateur mobile décrira le mouvement de M à partir de l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$.

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \sum \vec{F} - m \vec{a}_e(M) - m \vec{a}_c(M)$$

De cette façon, la RFD est encore valable dans le référentiel mobile \mathcal{R} (non galiléen) à condition d'ajouter dans le bilan des forces deux termes supplémentaires : **les forces d'inerties**

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\sum \vec{F} \right) + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

- $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e(M)$ désigne la force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c(M) = -2m \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})$ désigne la force d'inertie de Coriolis. Cette force n'existe que si le point matériel est en mouvement par rapport à \mathcal{R} et si \mathcal{R} est en rotation par rapport à \mathcal{R}_g .

8 Méthode d'application de la relation fondamentale de la dynamique

En générale, l'application de la RFD dans la résolution d'un problème mécanique, peut être résumée dans les principales étapes présentées ci-dessous. Ce pendant, par intuition plus ou moins complète de la mécanique, on peut passer certains étapes.

- Préciser le système étudié (dans notre cas c'est le point matériel).
- Préciser le référentiel d'étude. Est-il galiléen ?
- Faire le bilan des forces (n'oublier pas les forces d'inertie si vous avez opté pour un référentiel d'étude non galiléen).
- Quelles sont les contraintes géométriques, c'est-à-dire le degré de liberté ?
- Choix du repère de projection.
- Etablir l'expression du vecteur accélération de votre système selon les vecteurs de base du repère de projection choisi (n'oublier pas d'exprimer les accélérations d'entraînement et de Coriolis si vous avez choisi un référentiel d'étude non galiléen).
- Application de la relation fondamentale de la dynamique (RFD) et projection sur les vecteurs de base du repère de projection.
- Résolution mathématique des équations différentielles du second ordre avec conditions initiales et obtention de la loi horaire.

9 Exemple : Chute libre

Considérons un point matériel M de masse m en chute libre dans \mathcal{R}_T (référentiel terrestre) **supposé galiléen**. Le champ de pesanteur est considéré uniforme dirigé vers le bas.

9.1 Chute libre sans frottement

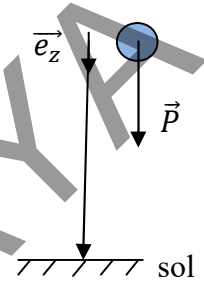
Le poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$ est la seule force appliquée au point matériel M .

La RFD dans \mathcal{R}_T est :

$$\vec{P} = mg \vec{e}_z = m \vec{a} \quad \text{soit} \quad \vec{a} = g \vec{e}_z$$

Ce qui donne le système d'équations différentiels :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = g \end{cases}$$



Conditions initiales : si à $t = 0$ on a $z_0 = 0$ et $\vec{V}_0 = \vec{0}$

Etant donné qu'il n'y a pas de vitesse initiale suivant les axes OX et OY, ces deux coordonnées restent en permanence nulle et on peut traiter le problème à une dimension (mouvement rectiligne suivant l'axe OZ).

L'intégration de l'équation différentielle aboutit à l'équation horaire :

$$z = \frac{1}{2} g t^2$$

La vitesse est donnée par :

$$\vec{V} = gt \vec{e}_z$$

9.2 Chute libre avec frottement linéaire

En plus du poids, le point matériel M est soumis à une force de frottement linéaire :

$$\vec{F}(V) = -\alpha \vec{V}$$

La RFD donne :

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = mg \vec{e}_z - \alpha \vec{V}$$

Soit :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = g \vec{e}_z - \frac{\alpha}{m} \vec{V}$$

En projetant sur les axes, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\alpha}{m} \dot{x} \\ \dot{y} = -\frac{\alpha}{m} \dot{y} \\ \dot{z} = g - \frac{\alpha}{m} \dot{z} \end{cases}$$

Conditions initiales : si à $t = 0$ on a $z_0 = 0$ et $\vec{V}_0 = \vec{0}$

L'équation différentielle en x s'écrit :

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

Or à l'instant $t = 0$, $\dot{x}_0 = 0$; donc :

$$\dot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \text{de même} \quad \dot{y} = 0$$

Le mouvement est vertical ($\vec{V} = V \vec{e}_Z = \dot{z} \vec{e}_Z$).

L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{dV}{dt} = g - \frac{\alpha}{m} V = \frac{\alpha}{m} \left(\frac{gm}{\alpha} - V \right)$$

Soit :

$$\frac{dV}{\frac{gm}{\alpha} - V} = \frac{\alpha}{m} dt$$

Ou alors

$$\frac{d \left(\frac{gm}{\alpha} - V \right)}{\frac{gm}{\alpha} - V} = - \frac{\alpha}{m} dt$$

Par intégration on obtient :

$$\frac{gm}{\alpha} - V = A e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

Et puisque à $t = 0$, $V_0 = 0$ on alors : $A = V_{lim} = \frac{gm}{\alpha}$

Il vient alors :

$$V = V_{lim} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right)$$

Et

$$\vec{V} = V_{lim} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) \vec{e}_Z$$

Quand $t \rightarrow \infty$, V tend vers la valeur limite $V_{lim} = \frac{gm}{\alpha}$

- Au départ le mouvement est accéléré $mg \gg \alpha V$
- Par suite la force de frottement augmente avec la vitesse ($F = \alpha V$) jusqu'à ce qu'il devient égale au poids ($mg = \alpha V_{lim}$). Dans ce cas ($\vec{P} + \vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$) ce qui signifie que le mouvement devient rectiligne uniforme avec une vitesse stable égale à $V = V_{lim} = \frac{gm}{\alpha}$

CHAPITRE V

MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

THÉOREMES GÉNÉRAUX

1 Théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique relie le moment cinétique au moment des forces. Ce théorème découle de la relation fondamentale de la dynamique. Il ne possède donc pas plus d'information que n'en possède la relation fondamentale de la dynamique.

1.1 Définitions

Moment cinétique

Considérons un point matériel M de masse m , animé d'une vitesse $\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}}$ par rapport à un référentiel \mathcal{R} . On appelle moment cinétique de M par rapport à un point O fixe dans \mathcal{R} , le vecteur :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} \Rightarrow m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}}$$

On définit également le moment cinétique par rapport à un axe. Soit \vec{u} le vecteur unitaire orientant un axe Δ . On appelle le moment cinétique d'un point matériel M par rapport à l'axe Δ , le scalaire :

$$L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}$$

Cette grandeur est indépendante du choix du point O , point quelconque de l'axe Δ .

Le moment cinétique s'exprime en J.s.

Moment d'une force

Considérons une force \vec{F} qui s'applique en un point M . On appelle le moment de la force \vec{F} par rapport à un point O , le vecteur :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

On définit également le moment d'une force par rapport à un axe Δ orienté suivant \vec{u} et passant par un point O quelconque, par le scalaire :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

Grandeur indépendante du choix du point O , point quelconque de l'axe Δ .

Le moment d'une force s'exprime en N.m.

1.2 Théorème du moment cinétique Dans \mathcal{R}_g galiléen

O étant fixe dans \mathcal{R}_g , on dérive le moment cinétique $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}$ par rapport au temps dans \mathcal{R}_g on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g})}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_g} &= \left[\frac{d(m \vec{OM} \wedge \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g})}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_g} \\ &= m \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g} + m \vec{OM} \wedge \left(\frac{d\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \end{aligned}$$

Avec $\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g}$ et $m \left(\frac{d\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \sum \vec{F}$

Où $\sum \vec{F}$ est la résultante des forces appliquées (forces galiléennes) au point matériel M .
Soit :

$$\left[\frac{d(\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g})}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge \sum \vec{F}$$

On reconnait à droite le moment des forces par rapport au point O ($\vec{\mathcal{M}}_O(\sum \vec{F})$).

Cette relation exprime **le théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g** :
Dans \mathcal{R}_g , la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un point fixe est égale au moment des forces appliquées par rapport au même point.

Le même théorème peut être décrit avec les moments définis par rapport à un axe Δ fixe dans \mathcal{R}_g (orienté suivant \vec{u}), en projetant suivant \vec{u} la relation exprimant le théorème du moment cinétique :

$$\left[\frac{d(\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g})}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{u} = (\vec{OM} \wedge \sum \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

\vec{u} est fixe dans \mathcal{R}_g , il vient :

$$\left[\frac{d(\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{u})}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_g} = (\vec{OM} \wedge \sum \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

Soit le **théorème scalaire du moment cinétique par rapport à Δ dans \mathcal{R}_g** :

$$\frac{d(L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}_g})}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\sum \vec{F})$$

1.3 Théorème du moment cinétique dans \mathcal{R} non galiléen

Le point O étant fixe dans \mathcal{R} et le moment cinétique en O étant défini par :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}} = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_r$$

En dérivant par rapport au temps dans \mathcal{R} on obtient :

$$\left[\frac{d(\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}})}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}_r = \overrightarrow{OM} \wedge \left(\sum \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \right)$$

Le théorème du moment cinétique (par rapport à un point ou par rapport à un axe) reste valable en référentiel \mathcal{R} non galiléen, en remplaçant la résultante des forces galiléenne $\sum \vec{F}$ par la somme :

$$\sum \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

1.4 Mouvement à force centrale : application du théorème du moment cinétique dans \mathcal{R}_g galiléen

Une force est dite *centrale* quand, à chaque instant, la direction de cette force passe par un point fixe O .

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sous l'action d'une force centrale \vec{F} de centre O , point fixe d'un référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Si l'on considère un repère de projection sphérique d'origine $O(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ on peut écrire la force en un point M :

$$\vec{F} = F(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

Et le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

L'application du théorème de moment cinétique par rapport à O , au mouvement de M dans \mathcal{R}_g selon la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ donne :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g})}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_g} &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r \vec{e}_r \wedge F(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r = \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g} &= \overrightarrow{\text{constant}} \end{aligned}$$

La conservation du moment cinétique à trois conséquences :

- **La trajectoire de M est plane**

\overrightarrow{OM} est à chaque instant normale au vecteur constant $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}$ et par conséquent la trajectoire de M est dans le plan perpendiculaire au vecteur $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}$ contenant le point O .

- **$r^2 \dot{\theta}$ est une constante**

La trajectoire étant plane, repérons M par ces coordonnées polaires (r, θ) .

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g} = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\text{constant}}$$

Avec $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$ et $\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

Il vient alors :

$$m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = \overrightarrow{\text{constant}}$$

Soit :

$$r^2 \dot{\theta} = C$$

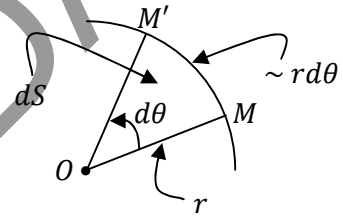
Où C est la constante des aires déterminée par les conditions initiales.

- **Loi des aires** : l'aire balayée par le vecteur \overrightarrow{OM} par unité de temps est constante et égale à $\frac{C}{2}$ (vitesse aréolaire) : $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$

L'air dS balayée par le vecteur \overrightarrow{OM} pendant dt s'interprète géométriquement comme équivalent à l'aire du secteur circulaire de rayon r et d'angle $d\theta$.

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM'}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{OM} + d\overrightarrow{OM})\| \\ &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\| = \frac{1}{2} \|r \vec{e}_r \wedge (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta)\| \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2}$$



$\frac{dS}{dt}$, appelée vitesse aréolaire, est constante pour un mouvement à force centrale.

Remarque : une relation de conservation qui ne fait intervenir que les dérivées premières est appelée *intégrale première*. La relation $r^2 \dot{\theta} = C$ traduit l'intégrale première du moment cinétique.

2 Théorème de l'énergie cinétique

2.1. Travail d'une force – Puissance d'une force

Le travail d'une force est un transfert d'énergie. Une force \vec{F} uniforme appliquée à un corps en déplacement rectiligne d'une longueur \vec{l} dans un référentiel \mathcal{R} , effectue un travail :

$$W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{l}$$

$W > 0$: le travail est dit *moteur* ; la projection de \vec{F} est dans le sens du déplacement.

$W < 0$: le travail est résistant ; la projection de \vec{F} s'oppose au mouvement.

$W = 0$: la force \vec{F} est normale au déplacement ($\vec{F} \perp \vec{l}$).

Dans le cas d'un déplacement quelconque (trajectoire curviligne) ou pour une force quelconque (non uniforme) on décompose le déplacement en déplacements élémentaires $d\vec{l}$. On définit le travail élémentaire de la force \vec{F} appliquée au point matériel M , pour la durée infinitésimal dt , par le produit :

$$\delta W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Avec $d\vec{l} = \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}} dt$

Soit :

$$\delta W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}} dt$$

Le travail d'une force (en particulier le travail élémentaire) dépend du référentiel. Il s'exprime en fonction du produit :

$$\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}}$$

Appelé la puissance instantanée de la force \vec{F} et qui dépend du référentiel d'étude.

Soit :

$$\delta W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} dt$$

L'unité du travail dans le système international est le joule (symbole : J ; $1J = 1kg \cdot m^2 s^{-2}$).
L'unité de la puissance est $J \cdot s^{-1}$ dans le système international.

Entre deux positions M_1 et M_2 du point M , le travail effectué par la force \vec{F} dans \mathcal{R} est :

$$W_{M_1 M_2}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{OM} \\ = \text{à la circulation du champ } \vec{F}$$

O est un point fixe dans \mathcal{R} .

Le travail dépend a priori de la forme de la trajectoire entre M_1 et M_2 .

2.2 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel \mathcal{R}_g galiléen

Supposons qu'une particule M de masse m , se déplace dans un référentiel \mathcal{R}_g galiléen sous l'action d'une résultante de forces galiléennes $\sum \vec{F}$ avec une vitesse $\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g}$. En vertu de la RFD nous pouvons écrire :

$$\mathcal{P}(\sum \vec{F})_{/\mathcal{R}_g} = \sum \vec{F} \cdot \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \left[m \frac{d\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{V}^2(M)_{/\mathcal{R}_g}}{2} \right)_{/\mathcal{R}_g}$$

La quantité

$$\frac{1}{2} m \vec{V}^2(M)_{/\mathcal{R}_g}$$

est par définition l'énergie cinétique $E_C(M)_{/\mathcal{R}_g}$ de la particule dans le référentiel \mathcal{R}_g .

$E_C(M)_{/\mathcal{R}_g}$ a la dimension d'une énergie elle s'exprime donc comme le travail en joule (J).

La variation de l'énergie cinétique est donc donnée par la relation suivante qui traduit le théorème de l'énergie cinétique sous sa formulation différentielle:

$$\frac{d}{dt}(E_C(M)_{/\mathcal{R}_g})_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\sum \vec{F})_{/\mathcal{R}_g}$$

En intégrant cette équation sur le temps entre deux instants t_1 et t_2 , on obtient dans \mathcal{R}_g la *formulation intégrale du théorème de l'énergie cinétique* :

$$\Delta E_{C/\mathcal{R}_g} = E_C(t_2)_{/\mathcal{R}_g} - E_C(t_1)_{/\mathcal{R}_g} = W_{M(t_1)M(t_2)}(\sum \vec{F})_{/\mathcal{R}_g}$$

$$\Delta E_{C/\mathcal{R}_g} = E_C(M_2)_{/\mathcal{R}_g} - E_C(M_1)_{/\mathcal{R}_g} = W_{M_1M_2}(\sum \vec{F})_{/\mathcal{R}_g}$$

$$\frac{1}{2}m(\vec{V}^2(M_2)_{/\mathcal{R}_g} - \vec{V}^2(M_1)_{/\mathcal{R}_g}) = W_{M_1M_2}(\sum \vec{F})_{/\mathcal{R}_g}$$

2.3 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel \mathcal{R} non galiléen

La puissance de la résultante des forces galiléennes dans le référentiel \mathcal{R} non galiléen est donnée par :

$$\mathcal{P}(\sum \vec{F})_{/\mathcal{R}} = \sum \vec{F} \cdot \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}}$$

En appliquant la RFD dans \mathcal{R} on obtient l'expression de la résultante des forces galiléennes suivante :

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} + m \vec{a}_e(M) + m \vec{a}_c(M) = m \left[\frac{d\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} - \vec{f}_{ie} - \vec{f}_{ic}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\sum \vec{F})_{/\mathcal{R}} &= \left(m \left[\frac{d\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} - \vec{f}_{ie} - \vec{f}_{ic} \right) \cdot \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}} \\ \mathcal{P}(\sum \vec{F})_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(\vec{f}_{ic})_{/\mathcal{R}} &= m \left[\frac{d\vec{V}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{V}^2(M)_{/\mathcal{R}}}{2} \right)_{/\mathcal{R}} \\ \frac{d}{dt}(E_C(M)_{/\mathcal{R}})_{/\mathcal{R}} &= \mathcal{P}(\sum \vec{F})_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(\vec{f}_{ic})_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Or :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_{ic})_{/\mathcal{R}} = -2m(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}}) \cdot \vec{V}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

Par conséquent, le théorème de l'énergie cinétique dans \mathcal{R} , non galiléen, sous sa formulation différentielle s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(E_C(M)_{/\mathcal{R}})_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}\left(\sum \vec{F}\right)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}}$$

En intégrant cette équation sur le temps entre deux instants t_1 et t_2 , on obtient dans \mathcal{R} , non galiléen, la formulation intégrale du théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_{C/\mathcal{R}} = E_C(t_2)_{/\mathcal{R}} - E_C(t_1)_{/\mathcal{R}} = W_{M(t_1)M(t_2)}\left(\sum \vec{F}\right)_{/\mathcal{R}} + W_{M(t_1)M(t_2)}(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}}$$

$$\Delta E_{C/\mathcal{R}} = E_C(M_2)_{/\mathcal{R}} - E_C(M_1)_{/\mathcal{R}} = W_{M_1M_2}\left(\sum \vec{F}\right)_{/\mathcal{R}} + W_{M_1M_2}(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}}$$

$$\frac{1}{2}m(\vec{V}^2(M_2)_{/\mathcal{R}} - \vec{V}^2(M_1)_{/\mathcal{R}}) = W_{M_1M_2}\left(\sum \vec{F}\right)_{/\mathcal{R}} + W_{M_1M_2}(\vec{f}_{ie})_{/\mathcal{R}}$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'applique dans \mathcal{R} en introduisant le travail (ou la puissance) de la force d'inertie d'entraînement. Le travail et la puissance de la force d'inertie de Coriolis sont nuls.

Remarque importante : le théorème de l'énergie cinétique exprime le fait que l'énergie cinétique ne varie que si le point matériel reçoit du travail mécanique. Une conséquence immédiate est qu'une force qui ne travaille pas (comme la force de Coriolis) ne peut pas faire varier la norme de la vitesse mais seulement sa direction.

3 Théorème de l'énergie mécanique

3.1 Energie potentielle et forces conservatives

3.1.1 Un nouvel outil mathématique : le gradient

Le gradient est un opérateur mathématique **différentiel linéaire vectoriel** qui s'applique à une fonction scalaire f des coordonnées de point et donne comme résultat un vecteur noté $\overrightarrow{\text{grad}}f$ ou $\vec{\nabla}f$ et se lit respectivement « gradient » ou « nabra ». L'expression du gradient dépend du système de coordonnées. Les coordonnées du gradient dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont données par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \vec{\nabla}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

La différentielle df de la fonction f est le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}f$ avec le vecteur déplacement élémentaire \vec{dl} :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \vec{dl}$$

De cette relation on en déduit les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}f$ dans les bases des coordonnées cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(\rho, \theta, z) = \vec{\nabla}f(\rho, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, \varphi) = \vec{\nabla} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

3.1.2 Force conservative

Une force \vec{F} est dite conservative s'il existe une fonction scalaire E_p de coordonnées de point telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

Une force qui ne s'exprime pas comme un gradient est une force non conservative.

E_p a la dimension d'une énergie, elle s'exprime en joule (J).

E_p est appelée énergie potentielle et on dit que la force \vec{F} dérive de l'énergie potentielle E_p .

Pour que \vec{F} soit conservative (dérive d'une énergie potentielle) il faut que la forme différentielle de $\vec{F} \cdot d\vec{l}$ soit une différentielle totale. Cette condition est représentée mathématiquement par :

- En coordonnées cartésiennes avec $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

- En coordonnées cylindriques avec $\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\theta \vec{e}_\theta + F_z \vec{e}_z$

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} = \frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial F_\rho}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial \theta} = \frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial z}$$

- En coordonnées sphériques avec $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r}, \quad \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial(r \sin \theta F_\varphi)}{\partial r}, \quad \frac{\partial(r \sin \theta F_\varphi)}{\partial \theta} = \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial \varphi}$$

En pratique, pour obtenir l'énergie potentielle E_p associée à une force \vec{F} , souvent on utilise le travail élémentaire de la force \vec{F} qui s'exprime comme :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$$

Exemple : énergie potentielle de la force élastique (ressort)

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad d\vec{l} = dl \vec{e}_x$$

Soit :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -k(l - l_0) dl = -d \left[\frac{1}{2} k(l - l_0)^2 \right] = -dE_p$$

Avec :

$$E_p = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 + \text{constante}$$

Remarques :

- L'énergie potentielle est définie à une constante près, déterminée par le choix d'une origine arbitraire de l'énergie potentielle. Seules les variations de E_p sont importantes et mesurables physiquement.
- L'énergie potentielle découle du travail et par conséquent, dépend du référentiel d'étude

Le tableau ci-dessous résume quelques énergies potentielles associées à quelques forces.

| Force | Expression | Energie potentielle |
|--------------------------|---|--|
| Force de gravitation | $\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{1/2}$ | $E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r} + K$ |
| Force électrostatique | $\vec{F}_{1/2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_{1/2}$ | $E_p = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + K$ |
| Force magnétique | $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$ | Ne travaille pas |
| Force de pesanteur | $\vec{P} = m\vec{g}$ | $E_p = mgz + K$ |
| Frottement solide/solide | $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ | \vec{R}_N ne travaille pas \vec{R}_T n'est pas conservative |
| Frottement solide/fluide | $\vec{F} = -\alpha(V)\vec{V}$ | Force non conservative. Travail résistant. |
| Force élastique | $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x$ | $E_p = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 + K$ |

3.1.3 Travail d'une force conservative

Calculons, pour une force conservative \vec{F} son travail sur un point mobile M dont la position passe d'un point M_1 à un point M_2 .

Nous avons vu que le travail élémentaire d'une force conservative s'exprime en fonction de l'énergie potentielle :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$$

Il vient alors :

$$W_{M_1 M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} -dE_p = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

Le travail d'une force conservative est indépendant du chemin parcouru entre les deux positions M_1 et M_2 du mobile M . Il ne dépend que de la position initiale M_1 et de la position finale M_2 . Le travail d'une telle force le long d'une courbe fermée est nul.

3.2 Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel \mathcal{R}_g galiléen.

Soit un point matériel M en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g et soumis à une résultante des forces galiléennes:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_c + \sum \vec{F}_{nc}$$

Avec $\sum \vec{F}_C$ est la résultante des forces conservative dérivant d'une énergie potentielle totale E_p et $\sum \vec{F}_{nc}$ la résultante des forces non conservative, ne dérivent pas de l'énergie potentielle.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à deux positions M_1 et M_2 du mobile M donne alors :

$$E_c(M_2) - E_c(M_1) = W_{nc} + E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

Soit :

$$(E_c(M_2) + E_p(M_2)) - (E_c(M_1) + E_p(M_1)) = W_{nc}$$

Posons alors :

$$E_m(M) = E_c(M) + E_p(M)$$

Cette grandeur s'appelle **l'énergie mécanique** du point matériel M dans \mathcal{R}_g . Elle dépend du choix \mathcal{R}_g mais aussi de la constante relative de l'énergie potentielle.

Le théorème de l'énergie mécanique, dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , se traduit par l'égalité entre la variation de l'énergie mécanique et le travail des forces non conservative :

$$E_m(M_2) - E_m(M_1) = W_{nc}$$

Ou

$$dE_m = \delta W_{nc}$$

Ou encore

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$$

Il ya donc conservation de l'énergie mécanique ($E_m = \text{constante}$) lorsque le système est conservatif, c'est-à-dire lorsque le système est soumis exclusivement à des forces conservatives et/ou des forces ne travaillant pas. L'équation ($E_m = \text{constante}$) est appelée *intégrale première de l'énergie mécanique*.

3.3 Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel \mathcal{R} non galiléen.

Dans \mathcal{R}_g , la relation exprimant le théorème de l'énergie mécanique a été obtenue en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Dans \mathcal{R} , le théorème de l'énergie cinétique fait intervenir le travail de la force d'inertie d'entraînement.

De ce fait, *le théorème de l'énergie mécanique reste valable dans \mathcal{R} en introduisant le travail de la force d'inertie d'entraînement (la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas) :*

$$E_m(M_2) - E_m(M_1) = W_{nc} + W(\vec{f}_{ie})$$

Dans certains cas la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $E_{pi}(\vec{f}_{ie})$ dans ce cas le théorème de l'énergie mécanique s'écrit, en n'oubliant pas d'introduire $E_{pi}(\vec{f}_{ie})$ dans l'énergie potentielle totale:

$$E_m(M_2) - E_m(M_1) = W_{nc}$$

4 Exemples de mouvements d'une particule en évolution conservative – mouvement à un degré de liberté

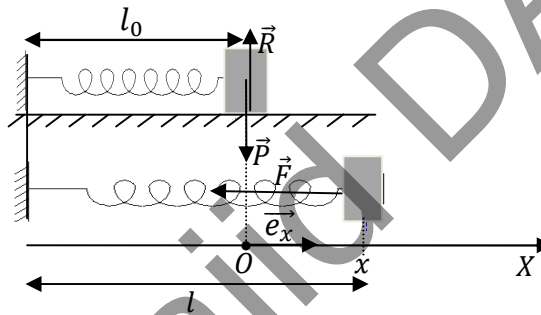
Les exemples de mouvements présentés sont étudiés par rapport à un référentiel du laboratoire supposé galiléen

4.1 L'oscillateur rectiligne

Considérons un point matériel M de masse m , susceptible de se déplacer **sans frottement** uniquement selon un axe horizontal OX et attaché à un ressort de constante de raideur k (l'autre extrémité du ressort est fixe). Nous supposons que le ressort est à l'équilibre lorsque $x = 0$. La force de rappel du ressort est proportionnelle à l'allongement x (pour x faible), il s'écrit :

$$\vec{F} = -k (l - l_0) \vec{e}_x = -k x \vec{e}_x$$

l_0 est la longueur du ressort à l'équilibre.



La force \vec{F} dérive de l'énergie potentielle $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$ (l'origine est choisie à la position d'équilibre O).

Puisque le déplacement se fait sans frottement, le poids $\vec{P} = m \vec{g}$ se compense donc par la réaction du support \vec{R} ($\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$). Ces deux forces sont toujours perpendiculaires au déplacement et ne travaillent pas, l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{constante}$$

E_m est déterminée par les conditions initiales. L'équation du mouvement peut être obtenue à partir de la RFD et aussi en dérivant par rapport au temps l'énergie mécanique E_m :

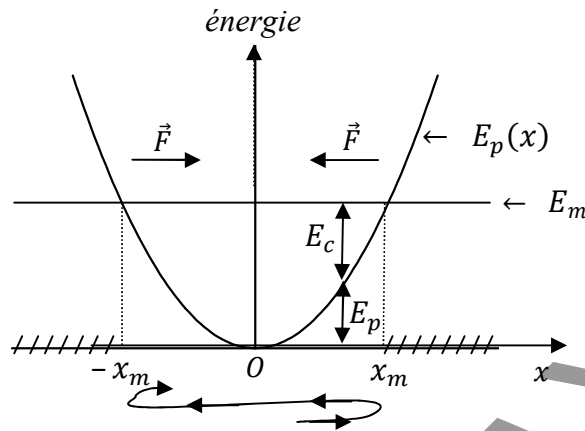
$$\frac{d}{dt} E_m = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = 0$$

$$m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0$$

D'où l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Il est possible d'en déduire certaines propriétés du mouvement à partir de la courbe $E_p(x)$ et sans intégrer l'équation différentielle du mouvement. La courbe $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$ est une cuvette parabolique.



Pour une énergie mécanique E_m donnée, les seules positions possibles qui sont compatibles avec $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \geq 0$, vérifient :

$$-x_m \leq x \leq x_m$$

Avec $x = \pm x_m$ sont les points d'arrêt où la vitesse s'annule et $E_p(\pm x_m) = E_m$.

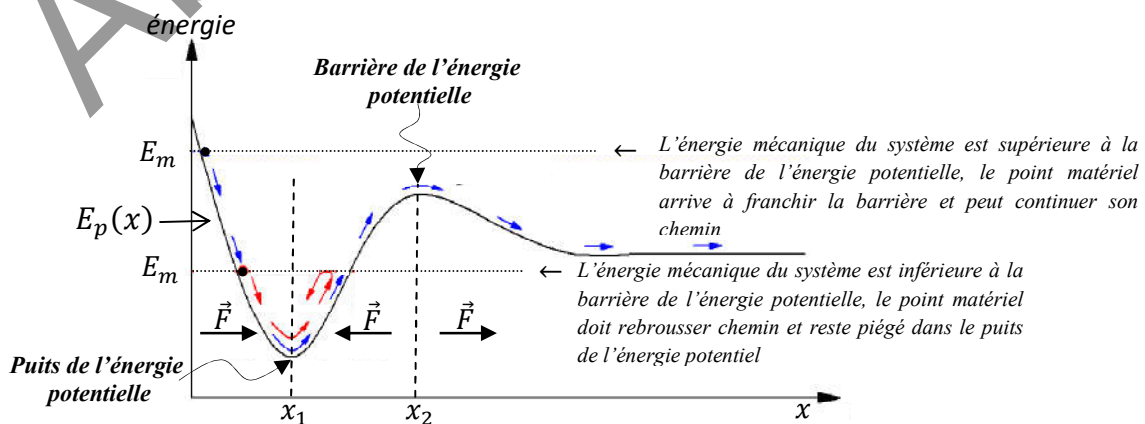
En $x = \pm x_m$ la force de rappel $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x = -\frac{d}{dx}E_p(x)\vec{e}_x$ est non nulle, la particule repart en sens inverse en effectuant ainsi un mouvement de va et vient autour de la position d'équilibre $x = 0$ présentant un **minimum d'énergie potentielle** :

pour $-x_m \leq x \leq 0$: $F(x) \geq 0$ et \vec{F} est dirigée vers la position d'équilibre O
 pour $0 \leq x \leq x_m$: $F(x) \leq 0$ et \vec{F} est dirigée vers la position d'équilibre O

On dit dans ce cas que la position d'équilibre est stable et le mouvement est oscillatoire.

4.2 Généralisation

Considérons un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur l'axe OX , sous l'action d'une résultante de force \vec{F} conservative dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Les positions x_1 et x_2 sont des positions d'équilibres du point matériel M . En effet $E_p(x)$ présente des extrêmes en x_1 et x_2 représentés par $\frac{d}{dx}E_p = 0$. Et comme $m\ddot{x} = F(x) = -\frac{d}{dx}E_p$ il vient alors $\ddot{x} = 0$; ce qui représente l'état d'équilibre du point matériel M dans les deux positions x_1 et x_2

L'étude du signe de $F(x) = -\frac{d}{dx}E_p$ montre que :

- Au voisinage de la position d'équilibre x_1 (**minimum local de $E_p(x)$**) la force a tendance à ramener le point matériel M vers cette position d'équilibre. Si le point matériel est abandonné sans vitesse initiale au voisinage de cette position, il en demeure ultérieurement voisin. **C'est une position d'équilibre stable.**
- Au voisinage de la position d'équilibre x_2 (**maximum local de $E_p(x)$**) la force a tendance à éloigner le point matériel M de cette position d'équilibre. Un point matériel abandonné sans vitesse initiale au voisinage de x_2 fuit cette position. **C'est une position d'équilibre instable.**

Par conséquent, le mouvement d'un point matériel M abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 inférieure à x_1 dépendra de son énergie mécanique E_m . La position de départ x_0 correspond à l'intersection entre la courbe $E_p(x)$ et la droite $E_m = cte$ et on distinguera deux cas :

- Si $E_m < E_p(x_2)$
Le point matériel M oscille autour de x_1 entre les deux points d'arrêt d'abscisses x_0 et x'_0 correspondant aux deux points d'intersection entre la courbe $E_p(x)$ et la droite $E_m = cte$. On dit que **l'énergie potentielle présente un puits en x_1 et une barrière en x_2** : l'énergie mécanique du système, dans ce cas, est inférieure à la barrière de l'énergie potentielle, le point matériel doit rebrousser chemin et reste piégé dans le puits de l'énergie potentielle. Nous disons qu'il s'agit d'un **état lié**.
- $E_m > E_p(x_2)$
L'énergie mécanique du système, dans ce cas, est supérieure à la barrière de l'énergie potentielle, le point matériel arrive à franchir la barrière et peut continuer son chemin. Nous disons qu'il s'agit d'un **état de diffusion**.

De façon générale :

- Des "creux" dans le profil de la courbe d'énergie potentielle sont équivalents à "des puits de l'énergie de potentielle" : les minima locaux de $E_p(x)$ représentent des positions d'équilibre stables. Ils sont définis par $\frac{d}{dx}E_p = 0$ (condition d'équilibre) et $\frac{d^2}{dx^2}E_p > 0$ (condition de stabilité).
- Des "bosses" dans le profil de la courbe de l'énergie potentielle sont équivalents à "des barrières de l'énergie de potentielle" : les maxima locaux de $E_p(x)$ représentent des positions d'équilibre instables. Ils sont définis par $\frac{d}{dx}E_p = 0$ (condition d'équilibre) et $\frac{d^2}{dx^2}E_p < 0$ (condition d'instabilité).
- Si l'énergie mécanique du système considéré est plus grande que les éventuelles barrières de l'énergie potentielle, le point matériel pourra les franchir (passer au-delà des barrières de l'énergie potentielle). Sinon, le point matériel devra rebrousser chemin.

BIBLIOGRAPHIE

- ✚ Alain Gibaud, Michel Henry, **Cours de physique – Mécanique du point**, Dunod, 2007.
- ✚ Jean Pierre Faroux, Jacques Renaud, **Mécanique I**, collection *J'intègre*, Dunod, 1998.
- ✚ Jean Marie Brébec, **Mécanique 1^{re} Année MPSI-PCSI-PTSI**, collection *H Prépa*, Hachette Supérieur, 2003.
- ✚ Hubert Gié, Jean Pierre Sarmant, **Mécanique I**, Lavoisier /Tec et Doc, 1995.
- ✚ Pascal Brasselet, **Mécanique MPSI-PCSI**, Puf, 2000.
- ✚ Marcelo Alonso, Edward J. Finn, **Physique générale Tome1 Mécanique et thermodynamique**, Dunod, 1979.